تحلیل حساسیت تطبیق پارامترهای مدل هستون

ساناز موسوی[۱*] Mousavi.Sanaz@stu.um.ac.ir

دکتر علیرضا سهیلی [۲] Soheili@um.ac.ir

[۱] نویسنده مسئول مکاتبات: دانشجوی کارشناسی ارشد آنالیز عددی دانشگاه فردوسی مشهد

[۲] استاد گروه ریاضی کاربردی دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: پارامترهای مدل هستون را با داده‌های بازار S&P500 مطابقت داده‌شده و سپس پارامترها، به‌عنوان نقطه شروع، برای تحلیل حساسیت اوراق اختیار معامله اروپایی و آسیایی، با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو، به کار گرفته‌شده‌اند. از داده‌های شاخص S&P500 به دلیل این که بازاری پویا برای اختیار معامله روی شاخص دارد، استفاده شده است. پارامترهای مدل برای اختیار اروپایی کالیبره گردیده و سپس از آن‌ها برای ارزش‌گذاری اختیارات نامتعارف آسیایی استفاده شده است. همان‌طور که در ادامه نشان داده‌شده، همبستگی میان تلاطم و قیمت سهم، تأثیر بسیار قابل‌توجهی بر قیمت انواع اختیار معاملات دارد. حساسیت قیمت یک اختیار معامله نسبت به یک متغیر با حروف یونانی، Δ، Γ، K، Θ، نشان داده‌شده‌اند. برای اختیار خرید اروپایی یک فرم بسته، از دلتا و گاما به دست می‌آید.

کلمات کلیدی: مدل هستون، شبیه‌سازی مونت‌کارلو، اختیار معامله اروپایی، اختیار معامله آسیایی، تحلیل حساسیت.

طبقه‌بندی موضوعی: G13, C51, C52, C61, C63

مقدمه

تخمین پارامترها

فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ مجموعه پارامترهای مدل دلخواه باشد. روشی که این مقاله، پارامترها با آن تخمین زده‌شده، کالیبره کردن مدل، به‌طوری است که قیمت مدل اختیار، p^{model}، بر قیمت بازار، p^{market}، منطبق باشد؛ یعنی، α را طوری بیابیم که $p^{\text{model}}(.;\alpha) = p^{market}$. این رویکرد به لحاظ ریاضیاتی، به شکل ذیل فرمول‌بندی می‌شود:

$$\min_{\alpha} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(\sigma_I^{\text{model}}(S;T_i,K_i,\alpha) - \sigma_I^{market}\right)^2 \qquad (۱)$$

که S قیمت جاری سهام، T زمان سررسید، K قیمت توافقی و N تعداد قیمت‌های مورداستفاده از بازار و σ_I، نوسانات ضمنی است. ثابت‌های $\omega_i, i = 1,\ldots,N$ وزن‌های اختصاص داده‌شده به هر اختیار است، بطوریکه:

$$\omega_i = \frac{K}{p_i^{ask} - p_i^{bid}}$$

K کوچک‌ترین شکاف قیمت عرضه و تقاضا است.

---

[*] سخنران

حروف یونانی

دلتا، Δ حساسیت اختیار خرید را نسبت به قیمت جاری سهام، S_0، اندازه‌گیری می‌کند، یعنی؛ $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S_0}$، که C نشان‌دهنده قیمت اختیار است. در مدل بلک-شولز، دلتای اختیار خرید اروپایی، به‌صورت ذیل به نمایش درمی‌آید [2]:

$$\Delta_{BS} = N(d_1)$$

گاما، Γ حساسیت دلتا را نسبت به قیمت فعلی اختیار اندازه‌گیری می‌کند. این یعنی مشتق دوم C نسبت به S_0، $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S_0^2}$. در مدل بلک-شولز [2] داریم:

$$\Gamma_{BS} = \frac{\varphi(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T-t}}$$

که $\varphi(x)$ تابع چگالی برای یک متغیر نرمال با میانگین 0 و واریانس 1 است.

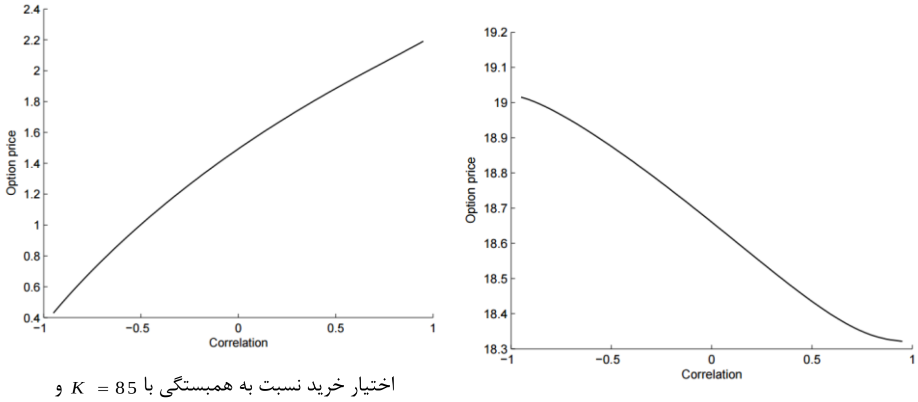
کاپا، K حساسیت قیمت اختیار نسبت به تلاطم σ را محاسبه می‌کند، یعنی؛ $K = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$.

تتا، Θ اثر زمان روی قیمت یک اختیار را اندازه‌گیری می‌کند، یعنی؛ $\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$.

به‌منظور جلوگیری از سوگیری قیمت‌ها در مدل، روش اویلر-ماریاما طوری اصلاح‌شده است که فرایند V_t همواره مثبت بماند؛ یعنی؛ الگوریتم بررسی می‌کند که اگر $\tilde{X}_{t_{n+1}} > 0$، به مرحله بعدی برود.

نتایج اساسی آنالیز حساسیت-همبستگی اختیار خرید اروپایی

در شکل۱(چپ) قیمت اختیار خرید اروپایی که با استفاده از فرم بسته محاسبه شده است، نسبت به همبستگی ρ با دو قیمت توافقی $K = 85$ و $K = 115$ رسم شده‌اند. قیمت فعلی سهم $S_0 = 100$ است. همچنین شکل ۱ (راست) یک اختیار سود ده و شکل۲ یک اختیار زیان‌ده را نشان می‌دهد. پارامترهای استفاده شده برای فرایند واریانس $\hat{\alpha} = (\upsilon_0, \theta, \kappa, \eta) = (0.0082, 0.0168, 6.21, 0.625)$ است([2]). زمان سررسید، یک‌ساله و نرخ بهره معادل 4% است. مطابق شکل‌ها می‌بینیم که برای اختیار سود ده، قیمت نسبت به ρ کاهشی و برای اختیار زیان‌ده قیمت نسبت به ρ افزایشی است.



شکل۱: قیمت اختیار خرید نسبت به همبستگی با $K=85$ و $S_0=100$ (چپ) و برای $K=115$ و $S_0=100$ (راست).

همبستگی اختیار معامله آسیایی

در شکل۲ می‌بینید که قیمت اختیار تقریباً به‌صورت خطی با افزایش همبستگی رشد می‌کند. همبستگی مثبت روند دارایی را با افزایش میانگین، صعودی می‌کند؛ و این به‌نوبه خود در افزایش بازدهی، در زمان سررسید اثرگذار است.

حروف یونانی اختیار اروپایی

برای محاسبه دلتای اختیار خرید اروپایی در مدل هستون، ابتدا از فرم بسته مدل هستون [1] نسبت به x مشتق گرفته تا به معادله ذیل برسیم:

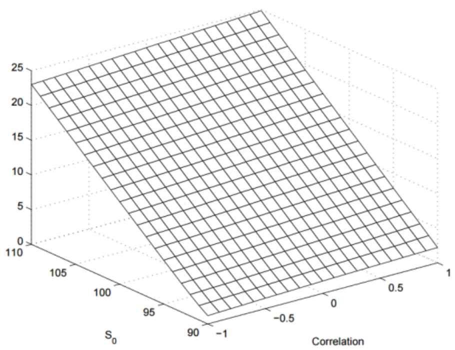
$$\frac{\partial c(x,\upsilon,\tau)}{\partial x} = K e^{-rr}\left(e^{x} P_1(x,\upsilon,\tau) + e^{x} P_1'(x,\upsilon,\tau) - P_0'(x,\upsilon,\tau)\right)$$

که

$$P_j = (x,\upsilon,\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Re\left(\frac{e^{C_j(k,\tau)\theta + D_j(k,\tau)\upsilon + ikx}}{ik}\right) dk$$

$$P_j'(x,\upsilon,\tau) \equiv \frac{\partial P_j(x,\upsilon,\tau)}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Re\left(e^{C_j(k,\tau)\theta + D_j(k,\tau)\upsilon + ikx}\right) dk$$

اکنون یادآوری می‌کنیم که



شکل۲: محاسبه سطح همبستگی اختیار خرید آسیایی

$$x = \ln\left(\frac{Se^{r\tau}}{K}\right)$$

ازاینجا، با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، عبارت ذیل برای دلتای اختیار خرید اروپایی در مدل هستون آشکار می‌شود:

$$\Delta_H = \frac{\partial c(x,\upsilon,\tau)}{\partial S} = \frac{\partial c(x,\upsilon,\tau)}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial S}$$

$$= \frac{1}{S} \times Ke^{-r\tau}\left(e^x P_1(x,\upsilon,\tau) + e^x P_1'(x,\upsilon,\tau) - P_0'(x,\upsilon,\tau)\right)$$

به شیوه‌ی مشابه، می‌توان، عبارتی برای محاسبه گاما برای اختیار خرید اروپایی در مدل هستون به دست آورد؛

$$\Gamma_H = \frac{\partial^2 c(x,\upsilon,\tau)}{\partial S^2} =$$

$$\frac{1}{2} \times Ke^{-r\tau}\left(e^x P_1'(x,\upsilon,\tau) + e^x P_1''(x,\upsilon,\tau) + e^x P_0'(x,\upsilon,\tau) - P_0''(x,\upsilon,\tau)\right)$$

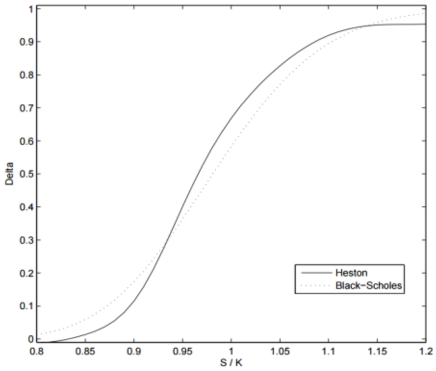
که

$$P_j''(x,\upsilon,\tau) \equiv \frac{\partial^2 P_j(x,\upsilon,\tau)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Re\left(ike^{C_j(k,\tau)\theta + D_j(k,\tau)\upsilon + ikx}\right)dk$$

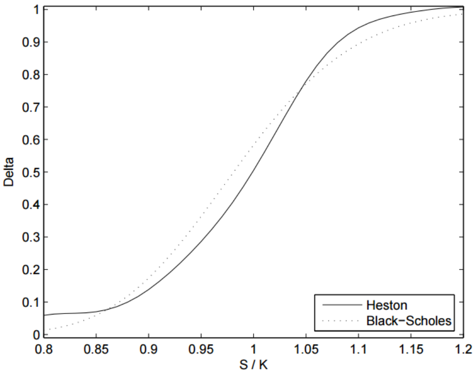
در شکل۳و۴، Δ_H نسبت به S/K رسم شده است. در هر دو نمودار مقادیر $K = 100$، $r = 3\%$، $T = 0.5$سال، $V_0 = \theta = 0.0168$، $\kappa = 6.21$ و $\eta = 0.625$ مشترک هستند. تلاطم استفاده‌شده برای محاسبه Δ_{BS} در V_0 و θ مشابه هستند، یعنی، $\sigma = \sqrt{0.0168} = 0.1296$.

حروف یونانی اختیار آسیایی

محاسبه حروف یونانی با شبیه‌سازی مونت‌کارلو بسیار سنگین است. در اینجا صرفاً به دلتا که در شکل۵ نمایش داده‌شده، بسنده شده است.



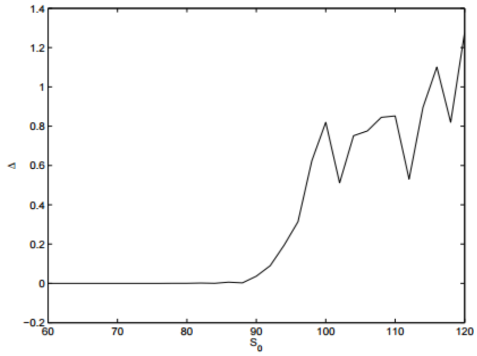
شکل۳: نمودار Δ_H و Δ_{BS} نسبت به S/K برای $T = 0.5$ با همبستگی منفی $\rho = -0.6674$.



شکل۴: نمودار Δ_H و Δ_{BS} نسبت به S/K برای $T = 0.5$ با همبستگی مثبت $\rho = 0.6674$.

نتیجه‌گیری

همان‌طور که مشاهده می‌شود با پارامترهای به‌دست‌آمده (که تطبیق بسیار خوبی با داده‌های بازار داشتند)، مدل بلک شولز، شرح خوبی از رفتار بازار به ما نمی‌دهد. درواقع، فرض ثابت نگه‌داشتن نوسانات که موجب سادگی است، موجب بالا بردن اثرات ضمنی لبخند نیز می‌شود. مدل هستون، همان‌طور که در اینجا نشان دادیم، درمانی برای این نقص است و اجازه می‌دهد بازار لبخند را تجربه کند



شکل۵ : دلتا نسبت به قیمت اولیه دارایی برای محاسبه اختیار خرید آسیایی

مرجع‌ها

1. S. Heston, 'A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options', The Review of Financial Studies 6, 327-343, 1993
2. R. Kjellin, G. Lovgren, Option pricing under stochastic volatility A numerical investigation of the Heston model, Institutionen för nationalekonomi med statistic, 2006.