یک مسئله معکوس مالی در بازار لایبور

عبدالساده نیسی[1] اکرم محمدی[2*] زهرا ابراهیم پور[3*]
z_ebrahimpur@yahoo.com,
a_neisy@iust.ac.ir, k.mohammadi931@atu.ac.ir،

چکیده: :نرخ بهره لایبور نرخی ست که از سوی بانکهای مختلف لندن برای محاسبه سود سپرده به بانکهای دیگر پیشنهاد می‌شود در واقع با احتساب این نرخ یک بانک می‌تواند از بانک دیگر پول قرض بگیرد . زمان ، سرسید و نرخ ارز از جمله فاکتورهای تعیین کننده این نرخ هستند ، نرخ لایبور برای مدت زمان سپرده گذاری در نظر گرفته می‌شود . نرخ لایبور ۱۴،۷،۳۰، ۶۰، ۹۰،۱۲۰، ۱۸۰، ۲۷۰، ۳۶۰روزه از جمله نرخهای مورد نظر در سپرده گذاری بین بانکی است که هر یک نرخ جداگانه ای دارد .که این نرخ بهره یکی از مهمترین شاخصهای اقتصادی است که امکان ارزایابی هزینه و سود سپرده را برای سرمایه گذاری بین المللی فراهم میکند.

در این مقاله در نظر داریم بازار لایبور را تشریح و سپس مدل‌های مربوطه را بدست آوریم، سپس قیمت‌گذاری اختیارات گستره تحت نرخ بهره لایبور را مدل‌سازی کرده و تغییرات مدل حاصل از شرایط فوق منجر به یک مسأله پیچیده‌ی ریاضی می‌گردد بنابراین به حل. PDE حاصل به روش مساله معکوس می‌پردازیم و سپس باتوجه به حل به روش عددی مساله مستقیم و معکوس حاصل به الگوریتمی جهت یافتن تخمین پارامتر نوسان ضمنی(تلاطم) می‌پردازیم

لغات کلیدی: مساله معکوس،نرخ بهره لایبور،روش عددی،اختیارات گستره

مقدمه

در این مقاله ما بطور عمده به شرح یک مدل برای قیمت‌گذاری اختیارات گستره تمرکز می کنیم که با استفاده از فایمن کاک بدست آمده و مدل حاصل مساله مستقیم نامیده می شود و نهایتاً برای بدست آوردن تقریبی از قیمت اختیار گستره به مدل سازی مساله معکوس می‌پردازیم و به حل مدل عددی حاصل با فرض مجهول بودن تلاطم با استفاده از روش مساله معکوس می پردازیم ، ساختار مقاله به شرح زیر است:

در بخش ۲ مدل اختیار گستره ارائه شده و در بخش ۳ مساله معکوس را تعریف می کنیم و راهبردهایی را برای حل مساله معکوس ارائه می کنیم ودر بخش ۴ الگوریتمی را برای برآورد تلاطم معرفی می کنیم.

۲- مدل اختیار گستره

ابتدا یک اختیار گستره که به یک نرخ سلف لایبور بستگی دارد را در نظر می گیریم. و ترکیبات $\mathcal{T} := \{T_0 , T_1, T_2\}$مناسب زمان را فرض کرده بطوری که

$0 = T_0 < T_i < T_k , 1 \leq i < k \leq 2$ و $t \leq T_i$

بنابراین نرخ سلف لایبور را درنظر میگیریم لذا برای ، $t \leq T$ ، $L(t)$ قیمت آتی در زمان t است. و فرض می گیریم $\delta = T_2 - T_1$

با توجه به مارتینگل بودن فرآیند تصادفی $L(t)$ ، معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را بررسی میکنیم:

$$\frac{dL(t)}{L(t)} = \sigma(t)dw^2$$

که در آن w^2 یک فرآیند براونی استاندارد تحت ρ^2 است و پالایه بدست آمده توسط w^2 به وسیله F نشان داده میشود و $\sigma(t)$ زمان مشاهده قطعی نوسانات وابسته به نرخ بهره است.

۲-قرارداد اختیار و مدل PDE

قرارداد اختیار و مدل PDE برای این اختیار به شرح زیر است:

در زمان T_0 قرارداد اختیار با سررسید در زمان T_2 را امضا می کنیم. در زمان T_2 مبلغ دریافتی خرید از اختیار برابر است با:

$$M\delta(\eta L(T_1) - \eta k)+$$

که δ طول دوره و پارامتر η برابر با ۱+ یا ۱- بر اساس موقعیت خرید یا فروش می باشد.

بنابراین نتیجه حاصل از اختیار که در زمان T_2 پرداخت میشود برابر است با:

$$\varphi(L_1) = M\delta(\eta L(T_1) - \eta k)+$$

قیمت اختیار به وسیله مشخص میشود.

حال با استفاده از فرمول زیر ،تغییر متغیر رادون نیکودیم و لم ایتو و چند جایگذاری دینامیک L_1 را تعیین میکنیم :

$$v_n(t) = -\sum_{j=\varphi(t)}^{n-1} \frac{\delta_j L_j(t)\sigma_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)}$$

لذا با در نظر گرفتن $\varphi(t) = 1$ ، n=1 و با استفاده از عملیات جبری ساده، μ را می یابیم:

$$\mu_n(t) = -\sigma_n^T(t)v_{n+1}(t)$$
$$\mu_1(t) = \frac{\delta_1 L_1(t)\sigma_1^2(t)}{1 + \delta_1 L_1(t)}$$

درنتیجه دینامیک L_1 برابر میشود با:

(1)
$$\frac{dL_1(t)}{L_1(t)} = -\frac{\delta_1 L_1(t)\sigma_1^2(t)}{1+\delta_1 L_1(t)}dt + \sigma_1(t)dw^{T_2}$$

با استفاده از قضیه فایمن کاک مسئله PDE سهمی وار با بازگشت متوالی در زمان بدست می آید:

یافتن $\Pi: (t, L_1)\epsilon[0, T_1] \times\ [0, \infty) \rightarrow \Pi(t, L)$ بطوریکه:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\delta_1 L_1(t)\sigma_1^2(t)}{1+\delta_1 L_1(t)}\rho\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{L}_1} + \frac{1}{2}{\sigma_1}^2{L_1}^2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial {L_1}^2} = 0 \qquad (2)$$

۳- مساله معکوس:

با توجه به اینکه نرخ بهره لایبور ازمدل رابطه (۱)و تغییر متغیر $\Pi(s,t) = e^{-Lt}v(s,t)$ از رابطه (۲) به رابطه زیر دست می یابیم:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\delta_1 L^2(t)\sigma_1^2(t)}{1+\delta_1 L(t)}\frac{\partial v}{\partial L} + \frac{1}{2}{\sigma_1}^2L^2\frac{\partial^2 v}{\partial L^2} - Lv = 0 \qquad (3)$$

با شرایط اولیه و مرزی(4),(5) و شرط نهایی (6):

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}} - \mathrm{Lv} = 0 \qquad (\mathrm{t}, \mathrm{L}) = \{0\} \times [0, \infty) \quad (۴)$$

$$v(0,t) = 0 \qquad (L,t) = \{0\} \times [0, T_1] \quad (5)$$

$$v(T, L, T) = Z \qquad 0 \leq T \leq T_{max} \quad (6)$$

K *را ضریب دیفرانسیل و v را یک تابع دیفرانسیل در نظر می گیریم و تعریف می کنیم:*

$$Kv = \frac{\delta_1 L^2(t)\sigma_1^2(t)}{1+\delta_1 L(t)}\frac{\partial v}{\partial L} + \frac{1}{2}{\sigma_1}^2L^2\frac{\partial^2 v}{\partial L^2} - Lv \qquad (7)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۳) داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Kv = 0 \qquad (8)$$

مساله قیمت گذاری اوراق مشتقه : تابع $v(t, L, T)$ و σ را از طریق ساده کردن روابط (۳) تا (۶) برای مدل قیمت گذاری فعلی بازار

$$v(t=0, L, T) = v(T) \qquad 0 \leq T \leq T_{max} \quad (9)$$

از اوراق قرضه صفر کوپن با سررسیدهای متفاوت T بدست می‌آوریم.

$1-3$: فرموله کردن معادله انتگرال

معادله الحاقی از(۳) را در نظر بگیرید برای $(t, L) \in [0, T_1] \times [0, \infty)$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial L}((\frac{\delta_1 L^2(t)\sigma_1^2(t)}{1+\delta_1 L(t)})U)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial L^2}({\sigma_1}^2 L^2 U)+LU=0 \qquad (10)$$

با شرایط مرزی: (11) = ۰ U(t,0) =U(t, ∞) *و شرایط اولیه:* (12)

$$\mathrm{U}(\mathrm{t},0,\mathrm{L})=\delta(r-r_0)$$

که $\delta(r-r_0)$ تابع دلتا دیراک وابسته به نرخ بهره لایبور L_0 می باشد. L^* را یک ضریب دیفرانسیل قرار می دهیم.اگر U یک تابع دیفرانسیلی باشد ما تعریف می کنیم:

$$K^*U=-\frac{\partial}{\partial L}\left(\left(\frac{\delta_1 L^2(t)\sigma_1^2(t)}{1+\delta_1 L(t)}\right)U\right)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{L}}({\sigma_1}^2\mathrm{L}U)-LU=0 \qquad (13)$$

بنابراین باتوجه به رابطه (10) داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-K^*U=0 \qquad (14)$$

با تعریف ضریب دیفرانسیل K و K^* در رابطه (13) و (۷) و شرایط مرزی (۱۱) وبا استفاده از انتگرال جزئی قرار می دهیم

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty v(T,L,T)\,U(t,K)dK=\int_0^\infty (v\frac{\partial U}{\partial \mathrm{t}}+U\frac{\partial v}{\partial \mathrm{t}})dL$$
$$=\int_0^\infty (v\,K^*U-KvU)dL=0 \quad (15)$$

با استفاده از شرایط (9) *و* (12) *بدست می آوریم:*

$$\int_0^\infty \mathrm{u}(\mathrm{T},L)\mathrm{d}L=\frac{v(T)}{Z} \qquad (16)$$

با استفاده از دیفرانسیل رابطه (۱۵) در T و ایجاد معادله

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial L}\left(\left(\frac{\delta_1 L^2(t)\sigma_1^2(t)}{1+\delta_1 L(t)}\right)U\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial L^2}({\sigma_1}^2L^2U)-LU=0 \qquad (T,L)$$
$$\in[0,T_{max}]\times[0,\infty) \quad (17)$$

و با توجه به انتگرال جزئی داریم:

$$\int_0^\infty LU(T,L)dL = -\frac{v'(T)}{Z} \qquad (18)$$

و مشابه رابطه (18) می توانیم معادله انتگرال غیر خطی را بصورت زیر بدست می آوریم:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\delta_1 L^2(t)\sigma_1^2(t)}{1+\delta_1 L(t)} - L^2(t)\right)U(T,L)dL = -\frac{v''(T)}{Z} \qquad (19)$$

فصل ۴: کاربرد عددی و نتایج آن

قرار دهید$\Omega = \{(T,L)|\ 0 \le T \le T_{max}\ ,0 < L < \infty\}$ و پوشش می دهیم Ω را با$j\Delta L$
$U_j^k =$و تعیین میکنیم$\{(T_k\,, L_j)|\ T_k\ = k\Delta\tau\}\,, L_j =\,, \Delta\tau = \frac{T_{max}}{m}\ , \Delta L = \frac{L}{n}$
$U(T_k\,, L_j), \sigma_k = \sigma(T_k\,)$

بنابراین با توجه به رابطه (17)داریم:

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta\tau} = \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta {L_1}^2}\left({\sigma_K}^2 {L_{j+1}}^2 U_{j+1}^{k+1}\right) - 2{\sigma_K}^2 {L_j}^2 U_j^{k+1} - \left({\sigma_K}^2 {L_{j-1}}^2 U_{j-1}^{k+1}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta L}\left(\frac{{\sigma_K}^2 {L_{j+1}}^2 \delta_{j+1}}{1+\delta_{j+1}L_{j+1}}\right)U_{j+1}^{k+1} - \left(\frac{{\sigma_K}^2 {L_{j-1}}^2 \delta_{j-1}}{1+\delta_{j-1}L_{j-1}}\right)U_{j-1}^{k+1}$$
$$- L_j U_j^{k+1} \qquad (20)$$

برای هر k در معادله (20) داریم.

$$C_{j-1}\ U_{j-1}^{k+1} + A_j\ U_j^{k+1} + B_{j+1}\ U_{j+1}^{k+1} = U_j^k \qquad (21)$$

$$C_{j-1} = -\left(\frac{{\sigma_K}^2\ L_{j-1}^2}{2\Delta L^2} + \frac{1}{2\Delta L}\left(\frac{\delta_{j-1}\ {\sigma_K}^2\ L_{j-1}^2}{1+\delta_{j-1}\ L_{j-1}}\right)\right)$$

$$A_j = 1 + \left(\frac{{\sigma_K}^2\ L_j^2}{\Delta L^2} + L_j\right)\Delta\tau$$

(22)

$$B_{j+1} = -\left(\frac{{\sigma_K}^2\ L_{j+1}^2}{2\Delta r^2} + \frac{1}{2\Delta L}\frac{\delta_{j+1}\ {\sigma_K}^2\ L_{j+1}^2}{1+\delta_{j+1}\ L_{j+1}}\right)$$

سپس انتگرال معادله (19) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} {\sigma_K}^2 \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\delta_j\ L_j^2}{1+\delta_j L_j} - L_j^2\right)U_j^{k+1}$$
$$= -\frac{v''(T_{k+1})}{Z\Delta L} \qquad (23)$$

معادله خطی رابطه (21) یک مجموعه ۳ قطری می باشد.

حال محاسبه عددی را با شروع از زمان T =0 با مقادیراولیه

$$U_j^0 = 0 \,, U_L^0 = \frac{1}{\Delta L} \,, L = \left[\frac{L_0}{\Delta L}\right]$$

در هر زمانی از T ، U(T,L) با حل معادله خطی (21) بدست می آید . و سپس با حل رابطه (23) می توانیم b را بدست آورید.

با جایگزینی σ در رابطه (۲۱) و تعیین دوباره U(T,L) می توانیم الگوریتم زیر را در نظر بگیرید

گام اول:برای k=0 , i=0 , $6_k^i = 0$, که k شاخص گام زمان و i شاخص تکرار

گام ۲: برای σ_k^i مشخص وبا توجه به حل مساله مستقیم (21) ، U را بدست آورده .

گام ۳:برای U تعیین شده و حل عددی رابطه (۲3) σ_k^{i+1} را بدست می‌آید

گام ۴: اگر $\|\sigma_k^{i+1} - \sigma_k^i\| = \xi$ به اندازه کافی کوچک، تکرار متوقف و به گام ۵ بروید. در غیر اینطورت i=1+i , i قرار دهید و به گام ۲ بروید.

گام ۵: قرار دهید K=K+1 ، اگر $T_k = T_{max}$, متوقف در غیر این صورت به گام ۲ بروید

مرجع:.

[1] Z.Guanquan ،Li.Peijun، An inverse problem of derivative security pricing، Resent Development in Theories and Numerics،2003 ،411-419.
[2] R. Pietersz, The LIBOR market model, Master's Thesis, Univ. Leiden, 2003.
[3] P. Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer, 2003.
[4] A.neisy، R.Chamani ،L.Shojaee،Three Critical Models in Mathematical Finance، Journal of advanced mathematical modeling، 2012، 2، 1، 77-96