Archive of SID

تابع چگالی احتمال برای جواب معادله دیفرانسیل لجستیک تصادفی

امید یادگاری*، دکتر محمدعلی جعفری
omidyadegari@gmail.com
m.a.jafari@khu.ac.ir

چکیده:
رشد جمعیت تغییر در جمعیت گونه‌ای از موجودات در بازه‌ای از زمان است. مدل‌هایی همچون مدل رشد نمایی (که بوسیله‌ی توماس رابرت مالتوس مطرح شده) و مدل لجستیک (که بوسیله‌ی پیر فرانسوا ورهاسلت مطرح شده) هر دو نمونه‌هایی از مدل‌های ساده برای رشد جمعیت می‌باشند. این قبیل از مدل‌ها توسط روش‌های ریاضی حل شدنی هستند. در این مطالعه فرم کلی مدل‌های رشد جمعیت و همچنین معادله دیفرانسیل لجستیک تصادفی که می‌تواند با توجه به برخی از اثرات محیطی یا یک نویز حاصل شود را بدست می‌آوریم. در ادامه این پژوهش راه‌های بدست آوردن تابع چگالی احتمال برای متغیرهای تصادفی بوسیله‌ی گشتاورهایش را توضیح داده و فرم بسته‌ای برای تابع چگالی احتمال انتگرال حرکت براونی هندسی بر حسب گشتاورهایش بدست می‌آوریم. سپس با استفاده از تابع چگالی احتمال بدست آمده، تابع چگالی احتمال برای جواب معادله دیفرانسیل لجستیک تصادفی را بدست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: حرکت براونی هندسی، تابع چگالی احتمال، گشتاورها، تبدیل فوریه، تبدیل فوریه معکوس.

طبقه بندی موضوعی: 60J70، 97K60.

۱ مقدمه

در مدل رشد نمایی که توسط توماس رابرت مالتوس مطرح شد، فرض شده که تعداد تولد و مرگ تابعی از جمعیت کل باشد. فرض کنیم تعداد تولد و مرگ در فاصله زمانی $[t,t+1]$ بترتیب αو β هستند. بنابراین می‌توانیم افزایش جمعیت در فاصله زمانی $[t,t+1]$ بر حسب $N(t)$ و α و β را بصورت معادله دیفرانسیل زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt} = rN(t). \\ N(0) = N_0 . \end{cases} \tag{1,1}$$

معادله فوق دارای جواب دقیق زیر می‌باشد.

www.SID.ir

Archive of SID

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \tag{۲,۱}$$

در قرن ۱۹ میلادی پیر فرانسوا ورهاسلت با مطرح کردن مدل لجستیک بیان داشت که جمعیت برای همیشه افزایش نمی‌یابد و برای $N(t) \ll N$، مدل لجستیک شبیه به مدل رشد نمایی می‌باشد. بطور کلی مدل‌های رشد جمعیت می‌تواند به فرم کلی زیر نوشته شوند [4]:

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)F(t, N(t)). \tag{۳,۱}$$

از آنجاییکه در زمان t نرخ رشد قطعی نمی‌باشد، مدل های رشد جمعیت را می‌توان با توجه به برخی از اثرات محیطی که تصادفی هستند، بهبود بخشید. بنابراین مدل های جمعیت را می‌توان با در نظر گرفتن هر دو قسمت قطعی و تصادفی به این صورت اصلاح نمود:

$$dN(t) = f(t, N(t))dt + g(t, N(t))\frac{dW(t)}{dt}dt. \tag{۴,۱}$$

که $dW(t)$، دیفرانسیل حرکت براونی و $\frac{dW(t)}{dt}$، نویز سفید می‌باشد.

تعریف ۱,۱. مدل لجستیک می‌تواند با توجه به برخی اثرات محیطی یا یک نویز، بصورت زیر نوشته شود:

$$dN(t) = rN(t)(K - N(t))dt + \beta N(t)dW(t). \tag{۵,۱}$$

قضیه ۲,۱. فرض کنید

$$\begin{cases} dN(t) = rN(t)(K - N(t))dt + \beta N(t)dW(t), \\ N(0) = N_0. \end{cases} \tag{۶,۱}$$

جواب دقیق برای معادله (۶,1) برابر است با

$$N(t) = \left(\frac{1}{r}\right)\frac{N_0 \exp((K - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta W(t))}{1 + N_0\int_0^t \exp((K - \frac{1}{2}\beta^2)s + \beta W(s))ds}. \tag{۷,۱}$$

www.SID.ir

Archive of SID

۲ تابع چگالی احتمال بر حسب گشتاورها

در این بخش، تابع چگالی احتمال $f(x)$ از متغیر تصادفی X بر حسب گشتاورهایش را بدست می-آوریم. برای این منظور فرض کنیم $\mathbb{E}[X^n]$ برای $n = 0,1,2,\ldots$ اعداد شناخته شده‌ای باشد. با استفاده از بسط سری تیلور $e^{-i2\pi xs}$ (که $i = \sqrt{-1}$) و تبدیل فوریه $f(x)$ و در نتیجه با اعمال تبدیل فوریه معکوس [1]، تابع چگالی احتمال بدست می‌آید:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i2\pi s)^n}{n!}\mathbb{E}[X^n]\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi xs}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i2\pi s)^n}{n!}\mathbb{E}\left[X^n\right]\right)ds. \qquad (۱,۲)$$

۳ تابع چگالی احتمال انتگرال حرکت براونی هندسی

در این بخش تابع چگالی احتمال حرکت براونی هندسی بر حسب گشتاورهایش بدست می‌آید [3].

قضیه ۳,۱. برای هر $\lambda,\mu \in \square$ و $n \in \square$ داریم:

$$\lambda^{2n}\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \exp[\lambda(W(u)+\mu u)]du\right)^n\right] = n!\sum_{j=0}^{n} c_j^{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}\exp\left(\left(\frac{\lambda^2 j^2}{2}+\lambda j\mu\right)t\right). \qquad (۱,۳)$$

که در آن $c_j^{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_j^{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)} = \prod_{\substack{k\neq j\\ 0\le k\le n}}\left(\frac{(\frac{\mu}{\lambda}+j)^2}{2} - \frac{(\frac{\mu}{\lambda}+k)^2}{2}\right)^{-1}.$$

اثبات: مراجعه شود به [3].

تذکر ۳,۲. با استفاده از (1,2) و قضیه ۳,۱، تابع چگالی احتمال $\int_0^t \exp[\lambda(W(u)+\mu u)]du$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i2\pi s)^n}{\lambda^{2n}}\sum_{j=0}^{n} c_j^{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}\exp\left(\left(\frac{\lambda^2 j^2}{2}+\lambda j\mu\right)t\right)\right]$$

www.SID.ir

Archive of SID

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i 2\pi x s} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i 2\pi s)^n}{\lambda^{2n}} \sum_{j=0}^{n} c_j^{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)} \exp\left(\left(\frac{\lambda^2 j^2}{2} + \lambda j \mu \right) t \right) \right] ds. \qquad (۲,۳)$$

۴ نتایج اصلی

در این بخش با استفاده از (1,2) و قضیه ۳,۱ تابع چگالی احتمال برای جواب معادله دیفرانسیل لجستیک تصادفی (یعنی معادله (۷,1)) را بدست می‌آوریم.

قضیه ۴,۱. اگر X و Y تابع چگالی احتمال توام $f(x,y)$ داشته باشند آنگاه تابع چگالی احتمال $U = \frac{Y}{X}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, ux) dx. \qquad (۱,۴)$$

اثبات: مراجعه شود به [2].

قضیه ۴,۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد پس برای ثابت $a, b \in \mathbb{R}$، تابع چگالی احتمال $Y = aX + b$ بصورت زیر می‌باشد:

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}. \qquad (۲,۴)$$

اثبات: مراجعه شود به [2].

نتیجه۴,۳ . فرم بسته تابع چگالی احتمال (۷,1) بصورت زیر بدست می‌آید:

www.SID.ir

Archive of SID

$$G(u,t)=\int_0^{\infty}|x|\frac{1}{N_0}\frac{1}{\left(\frac{ux}{N_0}\right)\beta\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{ux}{N_0}\right)-(K-\frac{1}{2}\beta^2)t\right)^2}{2\beta^2 t}\right)\times\left(\frac{1}{rN_0}\right)g\left(\frac{x-r}{rN_0}\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{rN_0}\right)\frac{1}{u\beta\sqrt{2\pi t}}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{ux}{N_0}\right)-(K-\frac{1}{2}\beta^2)t\right)^2}{2\beta^2 t}\right)\times$$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{i2\pi(x-r)s}{rN_0}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i2\pi s)^n}{\lambda^{2n}}\sum_{j=0}^{n}c_j^{(\frac{\mu}{\lambda})}\exp\left(\left(\frac{\lambda^2 j^2}{2}+\lambda j\mu\right)t\right)\right]ds\right]dx. \qquad (۳,۴)$$

که $g(x)$ در (۲,3) تعریف شده است.

مرجع‌ها

1. R. N. Bracewell, The Fourier Transform and its Application, McGraw-Hill, 2000.
2. G. Grimmett and D. Stirzaker, Probability and Random Processes, Oxford University Press, 2001.
3. R. Mansuy and M. Yor, Aspects of Brownian Motion, Springer-Verlag, 2008.
4. J. H. Matis and Thomas R. Kiffe. Stochastic Population Models; A Compatmental Perspective, Springer-Verlag, 2000.

www.SID.ir