قیمت بازاری ریسک برای مدل‌های آفین

راضیه گودرزی[*]، دکتر محمد جلوداری ممقانی

دانشگاه علامه طباطبایی دانشکده علوم ریاضی و رایانه

چکیده: قیمت بازاری ریسک یکی از عواملی است که در فرآیند قیمت گذاری مطالبات مشروط ظاهر می‌شود. بنابراین مدل‌هایی که برای آنها محاسبه این قیمت مناسب باشد مورد توجه بسیاری است. از جمله این مدل‌ها، مدل‌های آفین هستند. در این مقاله به معرفی قیمت بازاری ریسک گسترش یافته برای مدل‌های بازده آفین می‌پردازیم. قیمت بازاری ریسک آفین گسترش یافته یک برازش مناسب با اهمیت آماری بالا برای مدل‌های آفین فراهم می‌کند و تحت شرایطی فرصت‌های آربیتراژی را ایجاد نمی‌کند. با استفاده از قیمت بازاری ریسک آفین گسترش یافته چندین خانواده از مدل‌های ساختارزمانی آفین تخمین زده می‌شوند.

کلمات کلیدی: ساختارزمانی، قیمت بازاری ریسک، مدل بازده آفین، قیمت گذاری بدون آربیتراژ

طبقه بندی موضوعی: C51; G12; G13

۱ مقدمه

فرآیند ریشه‌ی دوم فلر [6] بطور گسترده در اقتصاد مالی استفاده و در مدل‌های ساختارزمانی مانند کاکس [2] و در مدل‌های تلاطم تصادفی قیمت سهام مانند هستون [7] پدیدار می‌شود. تعمیم چند متغیره فرآیند ریشه دوم فلر در مقالات ساختارزمانی افرادی مانند دوفی و کن [5] ، دای وسینگلتون [3] و دوفی [4] بکار برده شد. بی شک یکی از دلایل کاربرد گسترده‌ی این مدل ویژگی‌های تحلیلی آن است، مثلا در این مدل فرآیند ریشه دوم متغیر حالت از فرآیند انتشاری تبعیت می‌کند که ضرایب رانش و انتشار آن هر دو توابعی آفین از خود متغیر حالت هستند. البته مدل قیمت دارایی نه تنها باید فرآیند تصادفی را مشخص کند که مجموعه ای از عوامل پایه از آن

[*] سخنران

تبعیت می‌کنند، بلکه نحوه تفکر سرمایه گذار به ریسک و عوامل آن را نیز باید مشخص کند. از هریسون و کرپس و هریسون و پلیسکا به بعد این تکلیف را معمولا با مشخص کردن رفتار متغیرهای حالت تحت اندازه‌ی احتمال عینی و اندازه‌ی مارتینگل معادل حل می‌کنند. یک اقدام رایج در این جهت این است که فرض کنیم فرآیند متغیر حالت از یک اندازه ریشه دوم فلر نسبت به هر دو اندازه‌ی احتمال ولی با پارامترهای مختلف تبعیت می‌کند. چون تلاطم آنی هر متغیر حالت متناسب با ریشه دوم آن است پس حاصلضرب قیمت بازاری ریسک و تلاطم متناسب با متغیر حالتشان است، کاهش این حاصلضرب از رانش تحت اندازه احتمال عینی نتایجی در رانش تحت اندازه مارتینگل معادل دارد که همچنین آفین است. قیمت بازاری ریسک با ریشه دوم متغیرحالت رابطه‌ی معکوس دارد. همچنین پیوستگی، رانش را تحت هر دو اندازه حفظ می‌کند. با این حال، چنین تعیین قیمت بازاری ریسکی به ندرت در مدل‌سازی مالی استفاده می‌شود. کاکس [2] بیان کرد که اگر یک مقدار مرزی از فرآیند را بتوان بدست آورد باعث ایجاد فرصت آربیتراژی می‌شود، در حالیکه تلاطم آنی متغیرحالت در مرز صفر است، اگر قیمت بازاری ریسک نسبت معکوسی با ریشه دوم متغیرحالت داشته باشد، صرف ریسک مانند نزدیک شدن تلاطم به صفر، نسبت به متغیر حالت به سمت صفر نمی‌رود.

۲ نتایج اساسی

ورقه قرضه صفرکوپن، ورقه ای با سررسید T است که در سررسید با پرداخت مبلغ اسمی روی ورقه، تسویه حساب می‌کند و مطالبه‌ی مشروطی از کمترین پرداخت‌ها تحت اندازه‌ی Q است که

$$B(t,T)=\left[e^{-\int_t^T r_u\,du}\times B(T,T)\right],\ B(T,T)=1 \qquad (۱)$$

با محاسبه نرخ بهره می‌توان قیمت ورقه قرضه را بدست آورد.

نرخ بهره‌آنی r_t یک تابع آفین با بردار N - بعدی از متغیرهای حالت است که بوسیله‌ی Y_t بصورت زیرتعریف می‌شود،

$$r_t=d_0+d^TY_t \qquad (۲)$$

مقداری d_0 ثابت و d یک بردار در فضای N - بعدی است. معمولا مولفه‌های Y_t را با y_t نشان می‌دهیم، بنابراین $y_t(k)$ مولفه‌ی k ام Y_t برای $1\le k\le N$ است.

متغیر حالت Y_t از فرآیند انتشار

(۳) $$dY_t = \mu^P(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t^P$$ پیروی می

کند، که در آن $\mu^P(Y_t)$ یک بردار در فضای N – بعدی، $\sigma(Y_t)$ ماتریس $N \times N$ و W_t^P حرکت براونی N – بعدی تحت اندازه احتمال P است.

رانش آنی (تحت اندازه P) هر متغیر حالت یک تابع آفین از Y_t است،

(۴) $$\mu^P(Y_t) = a^P + b^P Y_t$$ که در آن

a^P یک بردار در فضای N – بعدی و b^P یک ماتریس $N \times N$ است.

کواریانس آنی بین هر جفت از متغیرهای حالت یک تابع آفین از Y_t است،

(۵) $$\left[\sigma(Y_t)\sigma^T(Y_t)\right]_{i,j} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}^T Y_t$$ که

$\left[\sigma(Y_t)\sigma^T(Y_t)\right]_{i,j}$ نشان دهنده‌ی عناصر سطر i و ستون j از حاصلضرب ماتریسی $\sigma(Y_t)\sigma^T(Y_t)$ که α_{ij} ثابت و β_{ij}^T یک بردار در فضای N – بعدی برای هر $1 \le i, j \le N$ است. با توجه به $\mu^P(Y_t)$ و $\sigma(Y_t)$ اگر اندازه‌ی احتمال Q را بصورت

(۶) $$Q = exp\left(-\int_0^T \lambda^T(Y_u)dW_u^P - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^T(Y_u)\lambda(Y_u)du\right)P$$ تعریف کنیم

برای (3) جوابی وجود دارد. با تعیین $\lambda(Y_t)$ شرایط زیر برقرار می‌شود:

(۷) $$E^P\left[exp\left(-\int_0^T \lambda^T(Y_u)dW_u^P - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^T(Y_u)\lambda(Y_u)du\right)\right] = 1$$

رابطه بالا طبق قضیه گیرسانف* $W_t^Q = W_t^P + \int_0^T \lambda(Y_s)ds$ که W_t^Q حرکت براونی N – بعدی تحت Q و

$$dY_t = \mu^Q(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t^Q \qquad (۸)$$

$$\mu^Q(Y_t) = \mu^P(Y_t) - \sigma(Y_t)\lambda(Y_t) \qquad (۹)$$

برقرار است. $\lambda(Y_t)$ قیمت بازاری ریسک نامیده می‌شود، که نسبت بازده اضافی یا صرف ریسک به تقاضای سرمایه گذاری با احتساب ریسک را اندازه می‌گیرد. نویکوف وکازاماکی و دای وسینگلتون [3] قیمت بازاری ریسک را برای معادله‌ی (9) تعیین کردند. دای و سینگلتون [3] قیمت بازاری ریسک را با استفاده از مقیاس نویکوف در بازه $[s,t]$ که $t \prec s+\varepsilon$ برای هر ε مثبت بصورت $\lambda(Y_t) = \sigma^T(Y_t)\lambda$ مشخص کردند که در آن λ یک بردار ثابت است. با توجه به اینکه $\mu^Q(Y_t)$ یک تابع آفین از Y_t است زمانی‌که $\sigma^T(Y_t)$ به Y_t وابسته نیست قیمت بازاری ریسک برای هر بازه $[s,t]$ از مقیاس نویکوف پیروی می‌کند. مقیاس نویکوف ممکن است زمانی‌که $\sigma^T(Y_t)$ به Y_t وابسته باشد در هر بازه‌ی زمانی بسته به پارامترهای مدل برقرار باشد. بدست اوردن قیمت بازاری ریسک برای مدل‌های آفین حائز اهمیت است زیرا این مدل‌ها دارای خواص تحلیلی هستند و انجام محاسبات در این مدل‌ها راحت است. دوفی [4] مدل‌هایی که قیمت بازاری ریسک آن‌ها را دای و سینگلتون [3] مشخص کرده بودند کاملا آفین نامید و رده گسترده‌تری موسوم به مدل‌های اساسا آفین را معرفی کرد. تنها محدودیت قیمت بازاری ریسک برای مدل‌های اساسا آفین بصورت زیر است: اگر برای ترکیب خطی متغیرهای حالت محدودیت وجود داشته باشد قیمت بازاری ریسک کاملا آفین است. در مقابل، اگر محدودیتی برای ترکیب خطی متغیرهای حالت نباشد قیمت بازاری ریسک می‌تواند هر مدل آفینی تحت اندازه‌های P و Q باشد. برای مثال،

$$dY_t = (a^P + b^P Y_t)dt + \sigma dW_t^P \qquad (۱۰)$$

برای متغیر حالت محدودیتی وجود ندارد، بنابراین $\lambda(Y_t)$ مــی‌توانـد هـر تـابع آفینــی از Y_t باشـد. درمقابل، در مدل زیر،

$$dY_t = (a^P + b^P Y_t)dt + \sigma\sqrt{Y_t}\,dW_t^P \qquad (۱۱)$$

متغیر حالت محدود شده است بنابراین قیمت بازاری ریسک کاملا آفین است. حالت دیگری از قیمت بازاری ریسک وجود دارد که کلی‌تر از کاملا و اساسا آفین است و قیمت بازاری ریسک آفین گسترش یافته نامیده می‌شود. قیمت بازاری ریسک آفین گسترش یافته مستقل ازآربیتراژ است وآن را برای مدل‌های یک، دو و سه عاملی بدست می‌آوریم. بنابراین دینامیک متغیرحالت را تحت هردواندازه‌ی P و Q تعیین می‌کنیم و فرآیند نرخ بهره را تعریف کرده و پارامترهای محدود مورد نیاز را مشخص می‌کنیم تا مطمئن شویم متغیرحالت محدود به مقدارمرزی نمی‌رسد. همچنین همه

محدودیت‌های موردنیاز را مشخص کرده تا از منحصربفرد بودن مدل مطمئن شویم. قیمت بازاری ریسک آفین گسترش یافته محدودیت‌های لازم برای برقراری شرایط غیردستیابی مرزی تحت اندازه‌های P و Q را اعمال می‌کند. قیمت بازاری ریسک اساسا آفین قیمت بازاری ریسک کاملا آفین را در بردارد و قیمت بازاری ریسک آفین گسترش یافته معمولا کاملا آفین و اساسا آفین را شامل می‌شود.

مرجع‌ها

1. Cheridito, P., Filipovic, D., L. Kimmel, R. Market price of risk specifications for affine models. Journal of Financial Economics 83 (2007) , pp. 123–170.
2. Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica 53 (1985) , pp. 385–408.
3. Dai, Q., Singleton, K.J. Specification analysis of affine term structure models. Journal of finance 55 (2000) ,pp. 1943–1978.
4. Duffee, G.R. Term premia and interest rate forecasts in affine models. Journal of finance 57 (2002) , pp. 405–443.
5. Duffie, D., Kan, R. A yield-factor model of interest rates. Mathematical finance 6 (1996) , pp. 379–406.
6. Feller, W. Two singular diffusion problems. Annals of mathematics 54 (1951) , pp. 173–182.
7. Heston, S. A closed-form solution of options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options. Review of financial studies 6 (1993) , pp. 327–343.