مقدمه‌ای بر هندسه مالی

محمد جلوداری ممقانی

دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی

چکیده

در این مقاله مدل‌های هندسی متناظر با چند مدل بازار مالی در چارچوب بلک-شولز را معرفی می‌کنیم. خواهیم دید که بسته به داده‌های مدل مالی هندسه متناظر می تواند یک خمینه ریمانی یا یک کلاف تاری باشد که فضای زمینه آن یک خمینه ریمانی است. مدل‌های هندسی کاربردهای بسیاری در مطالعه‌ی ویژگی‌های مدل مالی متناظر دارند. علت این است که هندسه امکان مطالعه‌ی مفاهیمی مانند خم، طول، مساحت، حجم، انحنا و انتقال را فراهم می کند که با مفاهیم موجود در بازار مانند آربیتراژ، تبدیل ارز، تبدیل واحد قیمت‌گذاری و غیره ارتباطی عمیق دارند. تعیین ارتباط دقیق این مفاهیم مالی و هندسی یکی دیگر از اهداف این مقاله است. این کار معمولا با استفاده از مفهوم التصاق صورت می‌گیرد.در این مقاله این مفاهیم در ساده‌ترین صورت ممکن که در آن خمینه‌ها فضاهای برداری اند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: تهاتر، داده مالی، خمینه ریمانی، انتقال موازی، مشتق کوواریان

طبقه بندی AMS : .35k05, 60H10, 65N75, 91G20

پیشگفتار

متناظر کردن داده‌های مالی با داده‌های هندسی و استفاده از هندسه برای مطالعه‌ی ویژگی‌های مدل‌های مالی عمری کوتاه اما پربار دارد. نخستین بار ملانی در [Mp, 1996] با استفاده از روش‌های هندسه دیفرانسیل مفهوم مشتق کوواریان را برای مطالعه شاخص های اقتصادی به‌کار برد. در همان زمان ایلینسکی فیزیکدانی از دانشگاه سن پیترز بورگ با استفاده از مفاهیم هندسه ریمانی و الکترودینامیک روش جدیدی در مطالعات مالی و به ویژه ریاضیات مالی ابداع کرد. کتاب وی [IK, 2001] که ترکیبی از هندسه ریمانی، فیزیک و الکترودینامیک در این زمینه است فرمول قیمت‌گذاری اختیار خرید بلک-شولز را با استفاده از مینیمم کردن عمل یک لاگرانژی ثابت می‌کند، به علاوه این کتاب تقریبا حاوی تجربیات ایلنیسکی در این زمینه و حاوی تقریبا ۳۰۰ مرجع مرتبط با موضوع کتاب است. در مقاله [Bj2, 2004] نویسنده موضوع مهم هندسه‌های نرخ‌های بهره را مطرح می‌کند و مساله‌ی سازگاری و وجود تحقق‌های متناهی بعد را مطرح می‌کند. در این مقاله بیورک فضاهای تابعی نامتناهی بعد، فضاهای هیلبرت

و باناخ را برای مطالعه دستگاه معادلات دیفرانسیل ناشی از چارچوب هیث-جرو-مورتون به کار می‌گیرد.

کتاب [H-L,2009] حاوی بیشتر از ۱۸۰ مرجع نامی از ایلنسکی نبرده است و این نشان می‌دهد که مکتب‌های گوناگونی در هندسه مالی وجود دارند. این کتاب خمینه‌های ریمانی متناظر با برخی مدل‌های مالی را شناسایی و معرفی می‌نماید. این کتاب چنانکه از عنوانش هم بر می‌آید ترکیبی از آنالیز تصادفی، ریاضیات مالی، هندسه‌ی ریمانی است. در این کتاب برای برخی مدل‌های مالی متناظر هندسی معرفی کرده‌اند

در سال‌های اخیر نظریه هندسی آربیتراژ با سرعتی روز افزون در حال صورت بندی بوده و محلی برای استفاده از هندسه و نگاه به مفاهیم هندسی از دیدگاه‌های دیگر بوده‌است. سیمونه فرینللی از فعالان پی‌گیر این صحنه است [Fa,2014] .

در نظریه‌های اقتصادی درآمد با قدرت خرید ثابت را درآمد ثابت می‌نامند. بنابراین شخصی که در یک کشور تورم زده حقوق ماهانه ثابت می‌گیرد درآمد ثابت ندارد. از آنجا که مفهوم مشتق صفر برای یک تابع متناظر است با ثابت بودن این تابع، سوال اساسی این است که آیا مفهومی جدید از مشتق وجود دارد که متناظر باشد با درآمد ثابت؟

لم ۱. فرض کنید اگر $S(t)$ در آمد و $P(t)$ قدرت خرید در زمان t باشد. اگر عدد ثابت و مثبت m وجود داشته باشد که

$$S(t) = mP(t)$$

آنگاه عملگر مشتق $\frac{\delta)}{\delta t}$ وجود دارد بطوری که

$$\frac{\delta S(t)}{\delta t} = 0.$$

برهان. فرض کنید حکم ثابت شده‌است و عملگر مشتق δ وجود دارد که

$$\frac{\delta S(t)}{\delta t} = \frac{\delta m P(t)}{\delta t} = 0$$

عملگر مشتق جدید را با قراردادن

$$\frac{\delta}{\delta t}=\frac{d}{dt}+c(t) \qquad (1)$$

با عملگر مشتق قدیم مرتبط می کنیم و بدست می‌اوریم

$$\frac{\delta S(t)}{\delta t}=m\frac{\delta P(t)}{\delta t}=m\left(\frac{dP(t)}{dt}+c(t)P(t)\right).$$

بنابراین قدرت خرید ثابت متناظر است با

$$\frac{dP(t)}{dt}+c(t)P(t)=0$$

از این معادله $c(t)$ را پیدا و در (1) قرار می‌دهیم و عملگر مشتق مورد نظر را به صورت

$$\frac{\delta}{\delta t}=\frac{d}{dt}-\frac{dln(P(t))}{dt}$$

بدست می‌آوریم.

در نتیجه نسبت به این مشتق جدید درآمد قدرت خرید ثابت، تابعی ثابت است.

تعریف ۱. این مشتق جدید را التصاق یا مشتق کوواریان می‌نامیم.

برای تعمیم این تعریف به فضاهای با ابعاد بالاتر فرض کنید فرض کنید فضاهای B و Π به ترتیب فضای سبدهای n دارایی و فضای قیمت‌های مولفه‌های این سبدها باشند. بنابراین در زمان t هر سبد دارایی یعنی هر عضو B به صورت

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\left(x_1(t),\dots,x_n(t)\right),$$

هر عضو Π به صورت

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})=\left(s_1(t),\dots,s_n(t)\right),$$

و ارزش سبد به صورت

$$V(t)=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}),$$

است.

تعریف ۲. فرض کنید ارزش سبد $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ صفر باشد و داشته باشیم

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\frac{d\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})}{d\boldsymbol{t}}.$$

در این صورت می‌گوییم $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ **بدون رشد تغییر** می‌کند.

سبد متغیر بدون رشد سبدی است که در طی زمان مولفه‌هایش تغییر می‌کنند ولی ارزش سبد تغییری نمی‌کند.

بنابراین اگر مثلا سبدی در سال ۱۳۷۰ شامل یک اتومبیل پیکان صفر و یک حساب بانکی بود اکنون تبدیل شده است به سبدی مثلا از طلا و مس با همان ارزش.

پرسش این است که تغییر بدون رشد را چگونه فرمولبندی کنیم؟

پاسخ کلی این است که با استفاده از مفهوم التصاق یا مشتق کواریان.

برای ارایه جزئیات این پاسخ تابع

$$\sigma: \Sigma = B \times \Pi \to \mathrm{B}, \sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) = \sum_{1}^{n} f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) e_i$$

موسوم به یک **برش** را در نظر می‌گیریم که در آن $\{e_i\}$ پایه ای از فضای برداری B است. **برش** ابزاری است که ما را در ردیابی مولفه‌های سبدهای قدیم و جدید(تغییر یافته) یاری خواهد کرد.

تعریف ۳. مشتق کواریان σ در طول یک خم

فرض کنید

$$\alpha: [0,1] \to \Sigma$$

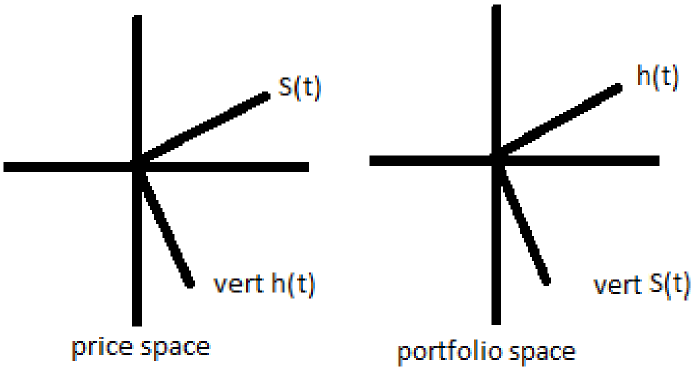
خمی مشتق‌پذیر در Σ باشد. مشتق سویی σ در سوی میدان مماس $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{d\boldsymbol{t}}$ را به صورت

$$\nabla_{\dot{\alpha}}^{0} \sigma = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \frac{\partial s_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t}) e_i$$

تعریف می‌کنیم.

مشتق کواریان σ در طول α برابر است با

$$\nabla_{\dot{\alpha}}^{a} \sigma = proj\left(\nabla_{\dot{\alpha}}^{0} (proj\ \sigma\ )\right) + proj(\nabla_{\dot{\alpha}}^{0} proj\ \sigma)$$



References

[Mp] Malaney, P. N., The index number problem: A Geometric differential geometric approach, PhD thesis, Harvard University, 1996

[Bj1] Bjork, T., Arbitrage theory in continuous time, Oxford, 2009.

[Bj2] Bjork, T., On the Geometry of Interest rate Models , in lecture note in mathematics 1847, Springer 2004.

[H-L] Henry-Laborder, P. Analysis, Geometry and modelling in finance, CRC, 2009.

[Ok] Oksendal, B. Stochastic differential equations 5th ed., Springer, 2009.

[Gr] Grigoriu, M. Stochastic calculus, Birkhauser, 2002.

[Kl] Klibaner, F. C., Introduction to stochastic calculus with applications, London, 2005.

[Nu] Nualart, D., Malliavin calculus and its applications, CBMS 110, AMS, 2009.

[Ca] Carmo, M. P. do, Riemannian geometry, Birkhauser, 1993.

[Sh] Shreve, S. E., Stochastic calculus for finance II, springer,2004.

[Je] Jelodari Mamaghani, M., geometry of some financial models, submitted.

[DeSc] Delbian, F. and Schachermayer, W., The mathematics of Arbitrage, springer 2006.

[Pa] Palais, R. S., The geometrization of physics, lecture notes in mathematics, Taiwan, 1981.

[IK] Ilinski, K., Physics of finance, Arxiv.org 1997.

[Fa] Farinelli, S., Geometric arbitrage theory and market dynamics, preprint, 2014.