سه مدل کارا در بازار بیمه

عبدالساده نیسی ، مریم بازیار [*]،فائزه بنی مصطفی

دانشیار گروه ریاضی دانشگاه علامه طباطبایی a_neisy@atu.ac.ir
mbazyar85@yahoo.com
faezeh_banimostafa@yahoo.com

چکیده: در این مقاله در نظر داریم سه مدل اساسی در بازارهای بیمه با استفاده از ریاضی مالی معرفی کنیم. ابتدا دو مدل قیمت‌گذاری بیمه‌های کشاورزی را معرفی می کنیم که یکی از انها پوشش درامد محصول (CRC) و دیگری بیمه‌نامه‌ای بر پایه‌ی مدل دیتون ولاروک می‌باشد و سپس یک مدل بیمه اتکایی و سرمایه گذاری بهینه تحت ریسک نرخ بهره و تورم معرفی می کنیم .

کلمات کلیدی: مدیریت ریسک، بیمه کشاورزی ، بیمه CRC،راهبرد سرمایه گذاری بهینه ، مطلوبیت ثابت نسبی ریسک گریزی

۱ مقدمه

در دو قرن اخیر فعالیت‌های بیمه‌ای در سرتاسر جهان توسعه یافته است.در کشورهای صنعتی بیمه نقش مهمی را در ثبات وضع اقتصادی بازی می‌کند و در کشورهای جهان سوم نیز مزایای اجتماعی و اقتصادی بیمه شناخته شده‌است.

۱٫۱. مدلسازی بیمه‌های کشاورزی

تولید کشاورزی یکی از پرمخاطره‌ترین فعالیت‌های اقتصادی است.به این سبب بیمه محصولات کشاورزی را می‌توان یکی از اهرم‌های توسعه کشاورزی دانست.
ابتدا به تعریف مفاهیم توابع خواهیم پرداخت. $\{x_t\}$ را به عنوان میزان در دست علامت‌گذاری می-کنیم.تابع تقاضای بازار را با $p(x) = a + bx$ نشان خواهیم داد $f(x_t)$تابع قیمت است و

---

[*] سخنران

$D(t,x_t)$ قیمت بیمه‌نامه است.پرتفویی به صورت $p(t,x_t)=\gamma D(t,x_t)+\lambda f(x_t)$ در نظر بگیرید. با اجرای روش‌های ریاضیات مالی و جایگذاری دینامیک x_t
و$(\gamma,\lambda)=(f'(x_t),-\left(\frac{\partial D(t,x_t)}{\partial x}\right))$و راهبرد بی‌آربیتراژی به معادله دیفرانسیل جزئی زیر دست خواهیم یافت:

$$\frac{\partial D(t,x)}{\partial t}+\frac{\mathcal{V}^2}{2}\frac{\partial^2 D(t,x)}{\partial x^2}-\left\{\frac{\mathcal{V}^2}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}-r\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}\frac{\partial D(t,x)}{\partial x}-rD(t,x)=0$$

که با حل معادله فوق،می‌توان قیمت بیمه کشاورزی را بدست آورد.

۲،۱.معادله دیفرانسیل جزئی برای بیمه‌نامه هایCRC

CRCبه معنی پوشش درآمد محصول می‌باشد محصولات کشاورزی ذاتاً دارای ریسک هستند و ما با استفاده از این بیمه‌نامه به دنبال پوشش ریسک هستیم.متغیر v را به عنوان قیمت بیمه‌نامه در نظر می‌گیریم.سبد پوششی $\prod$را که شامل یک بیمه‌نامهCRCاست به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\prod=v-\delta_f f-\delta_y$$

که درآن f قیمت قرارداد آتی و yبازده قراردادآتی و δ_f قیمت فروخته شده قرارداد آتی وδ_y بازده فروخته شده قرارداد آتی است. rنرخ بازده بدون ریسک بازده است.با انجام محاسبات به معادله زیر دست می‌یابیم.

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\sigma_f^2\frac{\partial^2 v}{\partial f^2}\right)+\sigma_y^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\sigma_f^2\sigma_y^2\rho_{f_y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial f\partial y}\right)+r[f(\frac{\partial v}{\partial f})+y(\frac{\partial v}{\partial y})]-rv=0\right.$$

۳،۱..مدل بیمه اتکایی و سرمایه گذاری بهینه

در مدل بیمه اتکایی و سرمایه گذاری بهینه فرآیند مازاد سرمایه گذار به وسیله مدل کلاسیک لوندبرگ به دست می آید :

$$\mathrm{dX(t)=cdt-d\{\sum_{i=1}^{N_t}Y_i\}}$$

که c نرخ حق بیمه سرمایه گذار و $\mathrm{Y_i}$ خسارت iام است ، که در آن $E[Y_i{}^j]=\mu_j$ و$\mathrm{N_t}$ فرآیند پواسن همگن است که در آن$E[N_t{}^j]=\lambda$ برای جلوگیری از ورشکستگی باید $c>\lambda\mu_1$ باشد ،همچنین $a(t)$ و η به ترتیب نشان دهنده بیمه اتکایی نسبی و بارهای اضافی تضمینی حق بیمه هستند .بیمه گر ریسک بیمه اش را به وسیله راهبرد بیمه اتکایی پوشش می دهد و فرآیند مازاد به وسیله فرآیند رانش زیر تقریب زده می شود :

$$\mathrm{dX(t)=\ \lambda\mu_1(\eta-\theta)dt+\ \lambda\mu_1\ \theta a(t)dt+\sqrt{\lambda\mu_2}\,a(t)dW_0(t)}\qquad(1)$$

فرض میشود ریسک نرخ بهره و تورم در بازار داده شده اند و نرخ بهره از فرآیند اورنشتاین -اولنبک و شاخص تورم از معادله فیشر پیروی میکند

دارایی های مسئله بهینه سازی دارایی بدون ریسک θ_0، اوراق قرضه صفر کوپن θ_B، اوراق خزانه مبتنی بر تورم θ_P و سهام θ_s هستند که اوراق قرضه صفر کوپن و اوراق خزانه مبتنی بر تورم به ترتیب ریسک نرخ بهره و ریسک تورم را پوشش می دهند و $X(t) = \theta_0(t) + \theta_B(t) + \theta_P(t) + \theta_s(t)$

دینامیک دارایی مدل عبارت است از :

$$dX(t) = \lambda\mu_1(\eta - \theta)dt + \lambda\mu_1\, \theta a(t)dt + \sqrt{\lambda\mu_2}\, a(t)dW_0(t) + \theta_0(t)\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \theta_B(t)\frac{dB_{K_1}(t)}{B_{K_1}(t)} + \theta_P(t)\frac{dP_{K_2}(t)}{P_{K_2}(t)} + \theta_s(t)\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} \quad (2)$$

و از طرفی ترکیب راهبرد بیمه اتکایی و سرمایه گذاری به شکل زیر است:

$$\bar{u}(t) \triangleq (a(t), \theta_B(t), \theta_P(t), \theta_s(t))^T$$

با جایگذاری دینامیک های دارایی های مسئله بهینه سازی، شکل بسته راهبرد بیمه اتکایی و سرمایه گذاری به صورت زیر به دست می آید :

$$dX(t) = \lambda\mu_1(\eta - \theta)dt + \bar{u}(t)^T\sigma[\Lambda\, dt + dW(t)]$$

که در آن :

$$\Lambda \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\lambda\mu_1\theta}{\sqrt{\lambda\mu_2}} \\ \lambda r_n \\ \lambda_I \\ \lambda_S \end{pmatrix} \quad , dW(t) \triangleq \begin{pmatrix} dW_0(t) \\ dW_{r_n}(t) \\ dW_I(t) \\ dW_S(t) \end{pmatrix} \quad , \sigma \triangleq \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda\mu_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{B_1(K_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{I_1} & \sigma_{I_2} & 0 \\ 0 & \sigma_{S_1} & \sigma_{S_2} & \sigma_{S_3} \end{pmatrix}$$

(3)

نهایتا مسئله بهینه سازی عبارت است از : (4)

$$\begin{cases} \max\{E\left[U\left(\frac{X(T)}{I(T)}\right)\right]\} \\ subject\ to : X(0) = x\ , \bar{u}(t)\ \text{قابل قبول} \end{cases}$$

که $U(x)$ تابع مطلوبیت ثابت نسبی ریسک گریزی و γ ریسک گریزی نسبی است :

$$U(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}\ , \gamma > 0\ , \gamma \neq 1 \ (5)$$

مراجع

1. A.Neisy, K.Salmani. An inverse problem for estimation of volatility .2011 .p.p 63-77
2. J. Grandll, 1991. Aspects of Risk Theory. Bl. DGVFM 28.1991 p.p 23–258.
3. J.Stokes, 2000. “A Derivative Security Approach to Setting Crop Revenue Coverage Insurance Premiums,” Journal of Agricultural and Resource Economics 25.2000.p.p:159-176