مدل‌سازی اوراق بهادار با درامد ثابت

عبدالساده نیسی[1]

[1] دانشیار گروه ریاضی ، دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبایی

چکیده: در این مقاله مدل‌ها و تکنیک‌هایی را که در تجزیه و تحلیل اوراق بهادار با درامد ثابت مفیدند را مطالعه نموده و تشریح می‌دهیم. بدون شک خانواده اوراق با درامد ثابت شامل اوراق بهاداری است که در آن ناشر اوراق به پرداخت یک یا چندین مقدار ثابت از پیش تعیین شده، در مقاطع زمانی مشخص متعهد می‌شود.
غالبا قیمت بسیاری از اوراق با درامد ثابت برحسب نرخ‌های بهره و ثمرات بیان می‌شود. لذا شناخت قیمت گذاری اوراق با درامد ثابت، معادل با شناخت رفتار نرخ بهره است. یک مفهوم کلی در تحلیل اوراق با درامد ثابت و رفتار نرخ بهره، ساختارهای زمانی نرخ های بهره است که در این مقاله مورد مطالعه قرار می گیرد.
سرنجام در این مقاله، تحلیل ها بر توسعه ابزارها و مدل ها در قیمت گذاری و مدیریت ریسک بسیاری از اوراق با درامد ثابت تمرکز می کنیم و علاوه بر آن برخی از مدل هایی که در تمامی موسسات مالی مدرن که به مبادله اوراق با درامد ثابت مشغولند و تحت تاثیر نرخ های بهره هستند نیز مورد مطالعه قرار می دهیم.
کلمات کلیدی: اوراق قرضه، مدلسازی اوراق بهادار، روشهای عددی در مالی، معادلات دیفرانسیل جزیی و روشهای عددی

۱ مقدمه

در این مقاله به مدل‌سازی اوراق بهادار با درآمد ثابت و نرخ بهره می‌پردازیم. اگرچه ارائه تعریف دقیق و جامعی از اوراق بهادار با درآمد ثابت مشکل است ولی در یک نگاه کلی (و البته با کمی اغماض)، این اوراق، اوراق بهاداری است که ناشر آن پرداخت مبلغ یا مبالغ مشخصی را در زمان‌های از پیش تعیین‌شده تعهد می‌نماید (مانک، ۲۰۱۱). در تعریفی دقیق‌تر، اوراق بهاداری که دارای مبالغ دوره‌ای (کوپن) و یا نهایی از قبل تعیین‌شده‌ای باشند را اوراق بهادار با درآمد ثابت می‌گویند. این مبالغ می‌تواند در دوره زمانی قبل از سررسید تحت عنوان کوپن به دارنده

این اوراق تعلق گرفته و یا در سررسید نیز مبلغ مشخص دیگری مانند قیمت اسمی این اوراق به دارنده ورقه پرداخت گردد.

۲ مدلهای ساده بازار با درامد ثابت

فرض کنید ارزش اسمی هر نوع ورقه قرضه برابر ۱ واحد پول. همچنین فرض کنید یک ورقه قرضه بدون کوپن با سررسید T، در زمان $t \le T$ با قیمت B_t^T در بازار مبادله گردد. زمان های T و S را در نظر بگیرید به طوری که $T < S$ باشد. مسلما تمام سرمایه گذاران مایل به دریافت 1 دلار در زمان T هستند تا در زمان S. بنابراین تابع تنزیل می بایست نزولی باشد، یعنی:

$$0 \le B_t^S \le B_t^T \le 1, \qquad t \le T \le S .$$

اگر R نشان دهنده نرخ کوپن دوره ای باشد در این صورت میزان پرداخت به ازای هر واحد ارزش اسمی به شکل زیر محاسبه می گردد:

$$Y_i = \begin{cases} R, & i = 1,\cdots,n-1 \\ 1+R, & i = n \end{cases}$$

فرض کنید R نشان دهنده نرخ کوپن دوره ای و ارزش اسمی اوراق نیز 1 باشد، در این صورت پرداخت در هر دوره ثابت و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$Y_i = Y \equiv \frac{R}{1-(1+\mathrm{R})^{-n}}, \qquad i = 1,\cdots,n .$$

و قرض پرداخت نشده سالیانه دقیقا پس از i مین پرداخت برابر است با

$$D_i = Y \, \frac{1-(1+\mathrm{R})^{-(\mathrm{n}-\mathrm{i})}}{R},$$

و میزان بهره در i مین پرداخت برابر است با

$$I_i = R D_{i-1} = R \, \frac{1-(1+\mathrm{R})^{-(\mathrm{n}-\mathrm{i}+1)}}{R-1+\mathrm{R})^{-\mathrm{n}}},$$

و میزان باز پرداخت در i مین پرداخت برابر است با

$$X_i = Y \, (1+\mathrm{R})^{-(\mathrm{n}-\mathrm{i}+1)}$$

بنابراین خواهیم داشت $X_i + I_i = Y$. یک ورقه قرضه کوپن دار را می توان به عنوان سبدی از اوراق قرضه بدون کوپن در نظر گرفت. سبدی متشکل از Y_1 ورقه قرضه بدون کوپن با تاریخ سررسید T_1، Y_2 ورقه قرضه بدون کوپن با تاریخ سررسید T_2، و الی آخر. اگر تمام این اوراق قرضه بدون کوپن در بازار موجود باشند و معامله شوند آن گاه قیمت ورقه قرضه کوپن دار در زمان t به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$B_t = \sum_{T_i > t} Y_i B_t^{T_i} \qquad (1.1)$$

که در آن مجموع بر روی تمام زمان های پرداخت انجام می شود. اگر این رابطه برقرار نباشد آن گاه به وضوح در بازار فرصت آربیتراژ به وجود خواهد آمد.

۲ مدلهای دینامیکی بازار با درامد ثابت

در ابتدا فرض کنید نرخ بهره گسسته و در سررسیدهای مختلف، متغیر باشد. در این حالت قیمت یک ورقه قرضه (B) با سررسید T ساله و کوپن C دلار و ارزش اسمی M دلاری برابر خواهد بود با (فوکاردی و فبوزی، ۲۰۰۴)

$$B = \frac{C}{(1 + r_1)^1} + \frac{C}{(1 + r_2)^2} + \ldots + \frac{C + M}{(1 + r_T)^T}$$

با مشتق گیری نسبت به r و انجام عملیات ساده ریاضی مدل زیر حاصل می شود:

$$\left.\frac{dB}{dr}\right|_{\Delta r = 0} = -\left(C(1 + r_1)^{-2} + 2C(1 + r_2)^{-3} + \ldots + T(C + M)(1 + r_T)^{-(T+1)}\right)$$

برای به دست آوردن شکل دیگر از مدل های اوراق با درامد ثابت، فرض کنید در پی قیمت‌گذاری اسناد خزانه‌ای با ارزش اسمی F دلار که در سررسید T پرداخت می‌شود ($B_T = F$) با نرخ بهره تصادفی می‌باشیم. همچنین فرض کنید که نرخ بهره r_t تابع فرایندی با معادله دیفرانسیلی تصادفی زیر باشد:

$$dr_t = \mu_r(r_t, t)dt + \sigma_r(r_t, t)dW_t$$

معادله دیفرانسیل با ضرائب جزئی زیر را برای قیمت ورقه بهادار با درآمد ثابت به دست خواهیم آورد

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\sigma_r^{۲}\frac{\partial^{۲} B}{\partial r^{۲}}+(\mu_r-\lambda\sigma_r)\frac{\partial B}{\partial r}-rB=۰, \qquad t<T$$

که در آن شرط نهایی $B_T=F$ است. لازم به ذکر است که این معادله در حالت کلی قابل حل تحلیلی نبوده و با در نظر گرفتن حالاتی خاص برای μ_r و σ_r می‌توان پاسخ تحلیلی برای آن ارائه داد.

مرجع‌ها

1. T. Chernogrova and B. Stehlikova, *A comparison of asymptotic analytical formulae with finite-difference approximations for pricing zero-coupon bond*, Numer Algor, 59 (2012), pp. 571-588
2. Z. Deng, P. Gilkey, J. Yu, and L. Yang, *An inverse problem arisen in the zero-coupon bond pricing*, Nonlinear Analysis, 11 (2010), pp. 1278–1288.
3. Y. K. Kwok, *Mathematical Models of Financial Derivatives*, 2nd ed., Springer, New York, 2008
4. A. Neisy, K. Salmani, *An inverse finance problem for the estimation of the volatility*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 53, (2013), pp. 63-77.