قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی تحت مدل کو با استفاده از روش مونت‌کارلو

لیلا ربیعی فرد[۱*]، رضا پورطاهری[۲]

[۱] leila.rabie25@gmail.com
[۲] pourtaheri@atu.ac.ir

چکیده: قیمت‌گذاری اختیارات از مباحث اصلی در تجزیه و تحلیل مشتقات مالی است. اما، متأسفانه فرمول دقیقی برای محاسبه‌ی قیمت اختیار فروش آمریکایی وجود ندارد، ولی به کمک روش‌های عددی و محاسبات مبتنی بر تقریب می‌توان قیمت این اختیارات را تا حد رضایت بخشی محاسبه نمود. یکی از این روش‌های عددی، روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو است. به دلیل اینکه ارزش مشتقات از قیمت دارایی پایه مشتق شده است لذا در قیمت‌گذاری اختیارات دینامیک دارایی پایه از اهمیت بسیاری برخوردار است. در این پژوهش ابتدا به بیان مدل کو و معرفی یکی از روش‌های مونت‌کارلو به نام روش رگرسیون پرداخته و در ادامه، قیمت اختیارات آمریکایی را که دارایی پایه آن از مدل کو پیروی می‌کند، با استفاده از روش رگرسیون به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: شبیه‌سازی مونت‌کارلو، ارزش استمرار، روش رگرسیون، مدل کو.

۱ مقدمه

با توجه به اینکه فرمول دقیقی برای محاسبه‌ی قیمت اختیار آمریکایی وجود ندارد، با استفاده از روش‌های عددی می‌توان قیمت این اختیارات را تا حد رضایت‌بخشی محاسبه نمود. یکی از روش‌های عددی موفق روش تفاضل متناهی است. این روش برای قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی در ابعاد پایین بسیار کارا می‌باشد اما وقتی ابعاد مسئله افزایش یابد و یا دینامیک قیمت دارایی پایه پیچیده شود، قیمت‌گذاری اختیار متحمل دردسرهای زیادی می‌شود. به دلیل اینکه ارزش اختیارات به قیمت دارایی پایه بستگی دارد لذا دینامیک دارایی پایه از اهمیت بسیاری برخوردار است. واقعیت‌های بازارهای مالی نشان می‌دهد که توزیع لگاریتم قیمت دارایی پایه، نرمال نیست و باید از مدل‌های مدرن که با واقعیت‌های بازار نزدیک‌تر است استفاده کرد. یکی از مدل‌های موفقی که در سال‌های اخیر معرفی شده است، مدل کو است. این مدل بسیار پیچیده‌تر از مدل براونی هندسی می‌باشد. برای مدل های پیچیده روش مونت‌کارلو نوید یک قیمت‌گذاری مناسب را می‌دهد. تایلی [۴] اولین شخصی بود که با استفاده از

* سخنران

شبیه‌سازی مونت‌کارلو اختیارات آمریکایی را قیمت‌گذاری کرد. کریپر [۱] با بهبود بخشیدن به اساس ایده‌ی تایلی یک الگوریتم پسرو برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی پیشنهاد کرد. تسیت سیکلس و ون روی [۵] و لانگ‌استاف و شوارتز [۳] راه کرییر را ادامه دادند و با استفاده از رگرسیون، قیمت اختیار را تخمین زدند.

۲ قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی

در این بخش به توضیح رگرسیون پرداخته و بعد از معرفی مدل کو، با استفاده از این روش به قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی تحت مدل کو خواهیم پرداخت.

۱,۲ فرمول برنامه‌ریزی پویا

در بحث قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو فرض می‌کنیم که اختیار فقط در تعداد متناهی زمان، مانند زمان‌های زیر، قابل اجرا است:

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = T.$$

حال فرض کنیم $h_i(s)$ عایدی اختیار و $V_i(s)$ ارزش اختیار در زمان t_i باشند و قیمت دارایی پایه در این زمان، $S_i = s$ است. برای محاسبه‌ی $V_0(S_0)$ الگوی زیر را در نظر می‌گیریم

$$V_m(s) = h_m(s),$$

$$V_{i-1}(s) = \max\{h_{i-1}(s), E(V_i(S_i)|S_{i-1} = s)\}, \qquad i = 1, \dots, m$$

۲,۲ روش رگرسیون

در این بخش عبارت $E[V_{i+1}(S_{i+1})|S_i = s] = C_i(s)$، را توسط یک ترکیب از تابع‌های پایه تخمین زده و از رگرسیون استفاده خواهیم کرد تا بهترین ضرایب این تخمین را محاسبه کنیم. همچنین توجهمان را روی مشتقاتی که عایدی آن‌ها عناصری از $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \beta)$ (فضای توابعی که توان دوم آن‌ها انتگرال‌پذیر است) هستند، منحصر می‌کنیم. چون L^2 فضای هیلبرت است و یک فضای هیلبرت دارای یک پایه متعامد شمارا است، پس هر $C_i(s)$ توسط یک ترکیب خطی از اعضای پایه

نمایش داده می‌شود. لذا اگر فرض کنیم $\{\varphi_r(s): R^d \to R | r \in \{0,1,\dots\}\}$ یک پایه برای L^2 باشد، آن‌گاه هر $C_i(s)$ می‌تواند به صورت

$$C_i(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{ir}\varphi_r(s)$$

نمایش داده شود. که در آن β_{ir}ها ضرایبی ثابت هستند. در نگرش رگرسیون، $C_i(s)$ را توسط تعداد متناهی تابع از عناصر پایه تخمین می‌زنیم. یعنی فرض کنیم تابع‌های $\varphi_r: R^d \to R$ و ثابت‌های β_{ir}، $r = 1, \dots, M$ و $i = 1, \dots, m$، موجودند به طوری که:

$$E[V_{i+1}(S_{i+1}) | S_i = s] = \sum_{r=1}^{M} \beta_{ir}\varphi_r(s).$$

این عبارت معادل است با:

$$C_i(\mathrm{s}) = \beta_i^{\top}\varphi(s),$$

که در آن

$$\beta_i^{\top} = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{iM}),$$
$$\varphi(s) = (\varphi_1(s), \dots, \varphi_M(s))^{\top}.$$

لذا بردار β_i به صورت

$$\beta_i = (E[\varphi(S_i)\varphi(S_i)^{\top}])^{-1}E[\varphi(S_i)V_{i+1}(S_{i+1})] \equiv B_{\varphi}^{-1}B_{\varphi V},$$

به دست می‌آید که در آن B_{φ} نمایش‌گر یک ماتریس $M \times M$ (فرض کنیم نامنفرد است) و $B_{\varphi V}$نمایش‌گر یک بردار به طول M است. اینک با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو β_i را تخمین می‌زنیم. ابتدا b مسیر مستقل $(S_{1j}, \dots, S_{mj})$، $j = 1, \dots, b$، را شبیه‌سازی می‌کنیم و تخمین حداقل مربعات β_i را به شکل زیر معرفی می‌کنیم:

$$\hat{\beta}_i = \hat{B}_{\varphi}^{-1}\hat{B}_{\varphi V}$$

که درآن $\hat{B}_{\varphi}$ یک ماتریس $M \times M$ بادرایه‌ی qrام به شکل

$$\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \varphi_q(S_{ij})\varphi_r(S_{ij})$$

و $\hat{B}_{\varphi V}$ یک بردار به طول M با qامین مولفه به شکل

$$\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} \varphi_q(S_{ik})V_{i+1}(S_{i+1,k})$$

است. هنگامی که $\hat{\beta}_i$ به دست آمد آن‌گاه برای تخمین ارزش استمرار داریم:

$$\hat{C}_i(s) = \hat{\beta}_i^{\mathsf{T}} \varphi(s) \qquad \forall s \in R^d$$

با محاسبه‌ی عبارت‌های فوق تخمین $\hat{\beta}_i$ و سپس تخمین $\hat{C}_i$ به راحتی به دست می‌آید. اما تابع $V_{i+1}(S_{i+1,k})$ در زمان t_{i+1}، مجهول است و باید آن را با تخمین $\hat{V}_{i+1}(S_{i+1,k})$ جایگزین کنیم. از تخمین‌های متفاوتی برای این تابع استفاده شده است

۳,۲ مدل کو

تحت این مدل، دینامیک قیمت دارایی پایه $S(t)$ توسط معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dW(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right)$$

که در آن $W(t)$ یک حرکت براونی، $N(t)$ یک فرایند پواسن با نرخ λ و $\{V_i\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی نامنفی و هم‌توزیع می‌باشد به‌طوری‌که $Y = \log(V)$ دارای توزیع نمایی مضاعف با چگالی

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{[y \geq 0]} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{[y<0]\eta_1 > 1\,,\,\eta_2 > 0}$$

و $q, p \geq 0$ و $q + p = 1$ است. در این مدل تمام منابع تصادفی یعنی $W(t)$، $N(t)$ و Y مستقل هستند. به دلیل وجود پرش‌ها، فضای احتمال ریسک خنثی یکتا نیست. در [۲] اندازه احتمال ریسک خنثی P^* انتخاب و معرفی شده است. فرایند قیمت دارایی پایه تحت اندازه احتمال ریسک خنثی P^*، به ازای هر $u < t$، از مدل زیر پیروی می‌کند:

$$S(t) = S(u) exp\left(\mu(u-t) + \sigma\big(W(t) - W(u)\big) + \left[\sum_{i=1}^{N(t)} V_i - \sum_{i=1}^{N(u)} V_i\right]\right)$$

فرض کنیم $(\tau_i)_{i=1}^{N(t)}$ زمان‌های پرش را نشان دهد و به‌طور قراردادی قرار می‌دهیم $\tau_0 = 0$ و $\tau_{N(t)+1} = T$

لم ۱,۲. اگر $N_T = n$، $\tau_l = a$، $\tau_m = b$، $0 \le a < b \le T$ و $0 \le l < m \le n+1$ باشد، آن‌گاه برای $\{\tau_{l+t}\}_{t=1}^{m-l-1}$ داریم:

$$\frac{\tau_{l+t} - \tau_l}{\tau_m - \tau_l} \sim Beta(t, m-l-t), \qquad t = 1, \dots, m-l-1$$

اینک به بیان الگوریتم شبیه‌سازی $S(t)$ و سپس الگوریتم روش رگرسیون برای قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی می‌پردازیم.

الگوریتم ۱,۲: الگوریتم شبیه‌سازی $S(t)$ در زمان‌های $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$

۱. شبیه‌سازی کنید $N(T) \sim P(\lambda T)$

۲. برای $l = 1{:}N_T$

- شبیه‌سازی کنید $\frac{\tau_l - \tau_{l-1}}{T - \tau_{l-1}} \sim Beta(1, N(T) - l + 1)$
- شبیه‌سازی کنید $Y_l \sim F$

۳. برای $i = 0{:}m-1$

- شبیه‌سازی کنید $W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \sim N(0, t_{i+1} - t_i)$
- شبیه‌سازی کنید $N(t_{i+1}) \sim P(\lambda t_{i+1})$
- شبیه‌سازی کنید $S(t_{i+1})$.

الگوریتم ۲,۲: الگوریتم روش رگرسیون برای قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی

۱. ابتدا b مسیر مستقل $(S_{1j}, \dots, S_{mj})$، $j = 1, \dots, b$ را با استفاده از الگوریتم ۱,۲ شبیه‌سازی می‌کنیم

۲. در گره‌ی نهایی قرار می‌دهیم، $\hat{V}_{mj} = h_m(S_{mj}) j = 1, \dots, b$,

۳. حرکت پسرو برای $i = m-1, \dots, 2, 1$ به کار می‌بریم:

الف) فرض کنیم $\hat{V}_{i+1j} j = 1, \dots, b$, را داریم لذا $\hat{\beta}_i = \hat{B}_{\varphi}^{-1} \hat{B}_{\varphi V}$ را محاسبه می‌کنیم.

ب) V_{ij} را تخمین می‌زنیم:

$$\hat{V}_{ij} = \max\{h_{ij}(S_{ij}), \hat{C}_i(S_{ij})\}, j = 1, \dots, b$$

۴. و در نهایت قرار می‌دهیم:

$$\hat{V}_0 = (\hat{V}_{11} + \cdots + \hat{V}_{1b})/b.$$

در گام (ب) مرحله‌ی (۳) برای تخمین V_{ij} از تخمین تسیت سیکلس و ون روی [۶] استفاده کردیم.

مرجع‌ها

1. Carriere, J. (1996), "*Valaution of early exercise price of options using simulation and nonparametrics regressio*", Insurance: Mathematics and Economics, 19:19-30
2. Kou, S. Wang, H. (2004). "*Option pricing under a double exponential jump diffusion model*". Management Science, 50:1178-1192.
3. Longstaff, F.A. and Schwartz, E.S. (2001), "*Valuing american option by simulation: a simple least square approach*", The Review of Financial Stuies , 14 , 113-147
4. Tilley, J.A. (1993), "*Valuing american options in a path simulation model*", Transac ctions of the Society of Actuaries, 45:83-104.
5. Tsitsiklis, J. and Van Roy, B. (1999), "*Optimal stopingof markov processes: Hilbert space theory, approximatation algorithm, and an application to pricing high dimensional financial derivative*", IEEE Tranactions on Automatics Control, 44, 1840-1851
6. Tsitsiklis, J. and Van Roy, B. (2001), "*Regression methods for pricingcomplex American style options*", IEEE Transactions on Neural Network, 12, 694-703