



## بررسی کمانش ورق‌های ضخیم لایه‌ای کامپوزیت با استفاده از روش نوار محدود

حجت اله تن زاده<sup>۱</sup>، حسین عموشاهی<sup>۲</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشگاه اصفهان

۲- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه اصفهان

h.tanzadeh89@gmail.com

### خلاصه

در این مقاله با استفاده از روش نوار محدود به بررسی کمانش ورق‌های ضخیم کامپوزیت پرداخته شده است. در این روش در جهت طولی از توابع مثلثاتی و در جهت عرضی برای درجات آزادی جابه‌جایی و چرخشی در لبه‌های المان از توابع چندجمله‌ای هرمیتی و همچنین درجات آزادی مربوط به تغییر شکل برشی و جابه‌جایی‌های درون صفحه از توابع لاگرانژ استفاده شده است. تئوری برشی مرتبه اول از دقت خوبی برخوردار بوده اما محاسبه ضریب اصلاح برش برای این تئوری به دلیل دشواری در پاره‌ای از موارد ضرورت استفاده از تئوری‌های برشی مراتب بالاتر را ایجاب می‌کند. در این مقاله از تئوری برشی مرتبه سوم ردی استفاده شده که این تئوری نیاز به ضرایب اصلاح برش تئوری مرتبه اول را مرتفع می‌سازد. به کمک قضیه حداقل انرژی پتانسیل کل، کمانش چند نمونه ورق با در نظر گرفتن پارامترهای مختلفی چون نسبت مدول الاستیسیته، نسبت ابعاد به ضخامت و جهات مختلف قرارگیری الیاف بررسی می‌شود. و در پایان نتایج مقاله با مقالات دیگر مقایسه شده و جداول و شکل‌های ارائه شده صحت این نتایج را با آن‌ها تایید می‌کند.

**کلمات کلیدی:** کمانش، ورق ضخیم کامپوزیت، روش نوار محدود، تئوری برشی مرتبه سوم ردی، توابع هرمیتی

### ۱. مقدمه

ورق کامپوزیت به ماده‌ای اطلاق می‌شود که از دو فاز ماتریس و تقویت‌کننده تشکیل شده باشد و از فاز دوم حداقل به اندازه ۵ درصد استفاده شده باشد. در مهندسی مواد این اصطلاح معمولاً به موادی گفته می‌شود که از یک فاز زمینه (ماتریس) و یک تقویت‌کننده (پرکننده) تشکیل شده باشند. ورق‌های کامپوزیت در سال‌های اخیر به دلیل خواص منحصر به فرد خود مورد توجه و استفاده قرار گرفتند. مهم‌ترین مزیت این ورق‌ها آن است که با توجه به نیازها، می‌توان خواص آن‌ها را کنترل کرد. از مزایای کامپوزیت‌ها می‌توان مقاومت بسیار بالا، وزن اندک و قابلیت کنترل مشخصات سازه‌ای با تغییر در جهت الیاف و تعداد لایه‌ها نام برد. کاربری این ورق‌ها بسیار ساده است و در مقابل خوردگی نیز مقاوم‌اند. بنابراین استفاده از آن‌ها در ساخت و سازها اجتناب‌ناپذیر به نظر می‌رسد. از این رو شناخت رفتار استاتیکی، دینامیکی، کمانشی و... ورق‌ها و پوسته‌های لایه‌ای کامپوزیت و تخمین صحیح تغییر مکان‌ها، در جهت طراحی مطلوب‌تر، ضرورت می‌یابد. مهمترین مسأله برای این ورق‌ها، پدیده کمانش می‌باشد که در مقادیر کوچک تنش‌های اعمالی رخ می‌دهد و منجر به تغییر شکل‌های بزرگ می‌گردد.

پرزمنیسکی [۱] برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ از روش نوار محدود برای محاسبه بار کمانش ورق استفاده کرد. وی در مقاله خود نامی از نوار محدود به میان نیاورد، اما چون المان‌های انتخاب شده توسط وی به صورت نوار بوده و این المان‌ها شبیه المان‌هایی بود که چونگ [۲] در سال ۱۹۷۱ به عنوان روش نوار محدود ارائه کرده بود، روش وی را نوار محدود نامیدند. تحقیقات وی برای تکیه‌گاه‌های مفصلی در لبه‌های تحت بار قابل استفاده

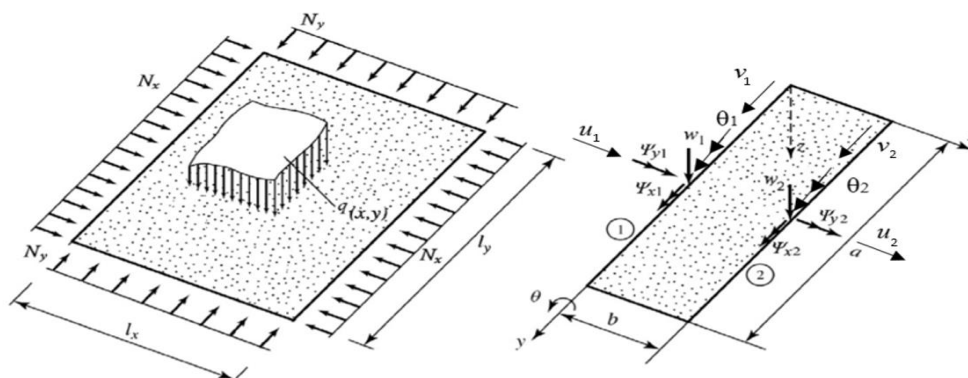
<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد  
<sup>۲</sup> استادیار

بود و اثرات بارهای برشی را هم در نظر نمی گرفت. ویتربیک [۳] در سال ۱۹۶۸ حل دقیق نوارهای محدود را بررسی کرد و پس از آن در سال ۱۹۷۳ به همراه پلانک روش کاملی را برای حل ورق‌های تحت بارهای فشاری و برشی به روش نوار محدود ارائه کرد. اساس کار ایشان بر مبنای توابع مختلط بود. مزیت کار این محققین در نظر گرفتن اثرات برش و توانایی حل کلیه شرایط مرزی در لبه‌های غیر بارگذاری شده بود. برادفورد و ازهری [۴] در سال ۱۹۹۵ روش‌های فوق را کامل کردند و شاید بتوان گفت که کامل‌ترین روش نوار محدود را ارائه کردند. آنان توابع شکل مناسبی را در جهت طولی بر مبنای شرایط مرزی لبه‌های بارگذاری ارائه کردند.

در این مقاله به بررسی ورق‌های ضخیم پرداخته خواهد شد که برخلاف تئوری‌های مذکور که جابجایی‌های درون صفحه‌ای را خطی فرض می‌کنند در تئورهای مراتب بالاتر توزیع تنش‌های برشی در راستای ضخامت ورق به صورت سهمی وار می‌باشد. در این مقاله از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی با استفاده از روابطی که در ادامه خواهد آمد به بررسی کمانش ورق‌های ضخیم به کمک روش نوار محدود معمولی پرداخته خواهد شد که این روش را می‌توان به عنوان بسط ساده‌ای از اجزاء محدود جهت بررسی ورق‌های مستطیلی در نظر گرفت.

## ۲. روش نوار محدود

روش نوار محدود معمولی می‌تواند به عنوان بسط ساده‌ای از اجزاء محدود جهت بررسی ورق‌های مستطیلی که دو انتهای روبه‌روی هم در راستای طولی مفصلی، گیردار و یا آزاد هستند در نظر گرفت؛ با این وجود دو انتهای دیگر در راستای عرضی می‌توانند شرایط مرزی دلخواهی داشته باشند. در روش نوار محدود سازه به تعدادی نوار تقسیم می‌شود و معمولاً سعی می‌شود این روش برای سازه‌هایی استفاده شود که بعد آنها حداقل در یک جهت ثابت باشد. توابع شکل در راستای عرضی به صورت توابع چندجمله‌ای فرض شده‌اند در حالیکه در راستای طولی نوارها، تابع جابجایی با توابع مثلثاتی حدس زده می‌شود و پس از تشکیل معادلات، انتگرال‌ها روی راستای طولی گرفته می‌شود و معمولاً تنها درجات آزادی در راستای عرضی باقی می‌مانند. این رویکرد اجازه‌ی گسسته‌سازی ورق‌های مستطیلی به صورت نوارهای طولی مطابق شکل ۱ را می‌دهد.



شکل ۱- درجات آزادی و بارهای خارجی بر روی المان نوار محدود [۵]

در این تئوری جزءهای جابجایی به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

در حالیکه  $\phi_x$  و  $\phi_y$  توابع تابیدگی<sup>۱</sup> هستند که بدین صورت نوشته می‌شوند:

$$\phi_x = -\frac{4}{3h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \phi_y = -\frac{4}{3h^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$u = u_0 + z\psi_x - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad v = v_0 + z\psi_y - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \quad w = w_0(x, y) \quad (3)$$

<sup>۱</sup> Warping functions



که  $u_0$  و  $v_0$  جابجایی‌های نقطه  $(x, y, 0)$  از میان صفحه و  $w$  تغییر مکان ورق در جهت  $z$  است که در ضخامت ورق ثابت در نظر گرفته شده است.  $\psi_x$  و  $\psi_y$  به ترتیب چرخش‌های عمود بر میان صفحه حول محورهای  $y$  و  $x$  هستند.

جابجایی‌های میان صفحه و چرخش‌های عمود بر آن را می‌توان بر حسب پارامترهای جابجایی، بدین صورت بیان نمود:

$$u_0 = \sum_{m=1}^r \mathbf{f}^u \mathbf{u}_m Y_{1m}, \quad v_0 = \sum_{m=1}^r \mathbf{f}^v \mathbf{v}_m Y_{2m}, \quad w_0 = \sum_{m=1}^r \mathbf{f}^w \mathbf{w}_m Y_{1m} \quad (4)$$

$$\psi_x = \sum_{m=1}^r \mathbf{f}^{\psi_x} \psi_{x,m} Y_{1m}, \quad \psi_y = \sum_{m=1}^r \mathbf{f}^{\psi_y} \psi_{y,m} Y_{2m} \quad (5)$$

در حالیکه  $u_0^m, v_0^m, w_0^m, \psi_x^m, \psi_y^m$  درجات آزادی مربوط به مود  $m$ -ام هستند.

توابع شکل در راستای عرضی از توابع چندجمله‌ای است در حالیکه توابع در راستای طولی مطابق با شرایط مرزی در راستای عرضی از توابع مثلثاتی استفاده شده است؛ و فرم مشخص  $Y_{1m}(y)$  و  $Y_{2m}(y)$  برای ورق‌های با تکیه‌گاه مفصلی به صورت زیر می‌باشد.

$$Y_{1m}(y) = \sin \frac{m\pi y}{a}; \quad Y_{2m}(y) = \cos \frac{m\pi y}{a} \quad (6)$$

بین جابجایی  $u_0$  و  $v_0$  همچنین  $\psi_x$  و  $\psi_y$ ،  $90^\circ$  درجه اختلاف فاز وجود دارد.

تابع شکل‌ها در راستای عرضی مطابق با سیستم مختصات نشان داده شده در شکل ۱ به صورت زیر هستند.

$$\mathbf{f}^u = \mathbf{f}^v = \mathbf{f}^{\psi_x} = \mathbf{f}^{\psi_y} = \mathbf{N} = [N_1 \quad N_2] = \left[ 1 - \frac{x}{b}, \quad \frac{x}{b} \right] \quad (7)$$

$$\mathbf{f}^w = \mathbf{H} = [H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4] = \left[ 1 - 3\frac{x^2}{b^2} + 2\frac{x^3}{b^3}, \quad -x + 2\frac{x^2}{b} - \frac{x^3}{b^2}, \quad 3\frac{x^2}{b^2} - 2\frac{x^3}{b^3}, \quad \frac{x^2}{b} - \frac{x^3}{b^2} \right] \quad (8)$$

که  $\mathbf{b}$  پهنای نوار می‌باشد.

روابط تنش- کرنش با صرف نظر از  $\sigma_z$  مطابق رابطه زیر است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

اندیس‌های ۱ و ۲ به ترتیب، در راستای الیاف و عمود بر آن در داخل صفحه ورق و اندیس ۳ راستای عمود بر صفحه‌ی ورق را نشان می‌دهند.  $Q_{ij}$ ها مشخصات ماده ارتو تروپیک هستند.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{12} = \nu_{12}Q_{22}; \quad Q_{66} = G_{12}; \quad Q_{44} = G_{23}; \quad Q_{55} = G_{31}; \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (10)$$

که  $E_1, E_2$  مدول الاستیسیته،  $\nu_{12}, \nu_{21}$  ضرایب پواسون و  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  مدول برشی مواد هستند که از طریق آزمایش به دست می‌آیند.

با تبدیل دستگاه مختصات محلی به دستگاه کلی، روابط تنش- کرنش در دستگاه کلی به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

و به صورت مختصرتر می‌توان آن را بدین صورت بیان نمود:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}' \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T$$



از روابط کرنش-جابجایی به فرم زیر در آنالیز استفاده می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} \quad (13)$$

که کرنش های خطی و غیرخطی به فرم روابط زیر هستند.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T = \sum_{m=1}^r \mathbf{B}_m \Delta_m = \mathbf{B} \Delta \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T = \left[ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]^T \right] \quad (15)$$

در حالیکه در رابطه (14)،  $\mathbf{B}_m$  ماتریس کرنش مربوط به مود  $m$ -ام،  $\mathbf{B}$  ماتریس کرنش کلی نوار و  $\Delta_m$  بردار درجات آزادی برای مود  $m$ -ام که به صورت زیر است.

$$\Delta_m = \langle u_1^m, v_1^m, w_1^m, \theta_1^m, \psi_{x1}^m, \psi_{y1}^m, u_2^m, v_2^m, w_2^m, \theta_2^m, \psi_{x2}^m, \psi_{y2}^m \rangle \quad (16)$$

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} N_1' Y_{1m} & 0 & -cz^3 H_1'' Y_{1m} & -cz^3 H_2'' Y_{1m} & (z - cz^3) N_1' Y_{1m} & 0 \\ 0 & N_1 Y_{2m}' & -cz^3 H_1 Y_{1m}'' & -cz^3 H_2 Y_{1m}'' & 0 & (z - cz^3) N_1 Y_{2m}' \\ N_1 Y_{1m}' & N_1 Y_{2m}' & -2cz^3 H_1' Y_{1m}' & -2cz^3 H_2' Y_{1m}' & (z - cz^3) N_1 Y_{1m}' & (z - cz^3) N_1 Y_{2m}' \\ 0 & 0 & (1 - 3cz^2) H_1 Y_{1m}' & (1 - 3cz^2) H_2 Y_{1m}' & 0 & (1 - 3cz^2) N_1 Y_{2m}' \\ 0 & 0 & (1 - 3cz^2) H_1' Y_{1m}' & (1 - 3cz^2) H_2' Y_{1m}' & (1 - 3cz^2) N_1 Y_{1m}' & 0 \\ N_2' Y_{1m} & 0 & -cz^3 H_3'' Y_{1m} & -cz^3 H_4'' Y_{1m} & (z - cz^3) N_2' Y_{1m} & 0 \\ 0 & N_2 Y_{2m}' & -cz^3 H_3 Y_{1m}'' & -cz^3 H_4 Y_{1m}'' & 0 & (z - cz^3) N_2 Y_{2m}' \\ N_2 Y_{1m}' & N_2 Y_{2m}' & -2cz^3 H_3' Y_{1m}' & -2cz^3 H_4' Y_{1m}' & (z - cz^3) N_2 Y_{1m}' & (z - cz^3) N_2 Y_{2m}' \\ 0 & 0 & (1 - 3cz^2) H_3 Y_{1m}' & (1 - 3cz^2) H_4 Y_{1m}' & 0 & (1 - 3cz^2) N_2 Y_{2m}' \\ 0 & 0 & (1 - 3cz^2) H_3' Y_{1m}' & (1 - 3cz^2) H_4' Y_{1m}' & (1 - 3cz^2) N_2 Y_{1m}' & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

که  $c = 4/3h^2$  است.

در این مقاله روش نوار محدود استاندارد بر اساس اصل کار مجازی در جهت به دست آوردن ماتریس های سختی استفاده شده است. ماتریس های درون صفحه و خارج از صفحه به طور مستقل به دست می آیند.

اصل کار مجازی بدین صورت می باشد.

$$\delta W_{int}^e = \delta W_{out}^e \quad (18)$$

در حالیکه  $\delta$  عملگر تغییرات و  $W_{int}^e$  و  $W_{out}^e$  به ترتیب کار انجام شده ی داخلی و خارجی بر روی یک نوار محدود می باشند به صورت زیر تعریف می شوند.

$$W_{int} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}_L^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (19)$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \int \frac{N_x}{h} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dV + \frac{1}{2} \int \frac{N_y}{h} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dV \quad (20)$$

در حالیکه  $V$  حجم نوار و  $N_x, N_y$  بارهای درون صفحه ای مطابق شکل ۱ بر روی ورق می باشند.

با قرار دادن رابطه (14) در روابط (19) و (20) رابطه ی (18) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext}^{N_x} + \delta W_{ext}^{N_y} \quad (21)$$

بنابراین

$$\delta W_{int} = \delta \Delta^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} \right) \Delta \quad (22)$$



$$\delta W_{\text{ext}}^{N_x} = \delta \Delta^T \left( \int_V \frac{N_x}{h} (\mathbf{B}^{1N_x})^T \mathbf{B}^{1N_x} \right) \Delta + \delta \Delta^T \left( \int_V \frac{N_x}{h} (\mathbf{B}^{2N_x})^T \mathbf{B}^{2N_x} \right) \Delta \quad (23)$$

$$+ \delta \Delta^T \left( \int_V \frac{N_x}{h} (\mathbf{B}^{3N_x})^T \mathbf{B}^{3N_x} \right) \Delta$$

$$\delta W_{\text{ext}}^{N_y} = \delta \Delta^T \left( \int_V \frac{N_y}{h} (\mathbf{B}^{1N_y})^T \mathbf{B}^{1N_y} \right) \Delta + \delta \Delta^T \left( \int_V \frac{N_y}{h} (\mathbf{B}^{2N_y})^T \mathbf{B}^{2N_y} \right) \Delta \quad (24)$$

$$+ \delta \Delta^T \left( \int_V \frac{N_y}{h} (\mathbf{B}^{3N_y})^T \mathbf{B}^{3N_y} \right) \Delta$$

در روابط (23)، (24) ماتریس‌های  $\mathbf{B}^{N_x}$ ،  $\mathbf{B}^{N_y}$  به صورت زیر هستند:

$$\mathbf{B}_m^{N_x} = \mathbf{B}_m^{1N_x} + \mathbf{B}_m^{2N_x} + \mathbf{B}_m^{3N_x}$$

$$\mathbf{B}_m^{1N_x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} N_1' Y_{1m} & 0 & -cz^3 H_1'' Y_{1m} & -cz^3 H_2'' Y_{1m} & (z - cz^3) N_1' Y_{1m} & 0 \\ N_2' Y_{1m} & 0 & -cz^3 H_3'' Y_{1m} & -cz^3 H_4'' Y_{1m} & (z - cz^3) N_2' Y_{1m} & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_m^{2N_x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & N_1' Y_{2m} & -cz^3 H_1' Y_{1m}' & -cz^3 H_2' Y_{1m}' & 0 & (z - cz^3) N_1' Y_{2m} \\ 0 & N_2' Y_{2m} & -cz^3 H_3' Y_{1m}' & -cz^3 H_4' Y_{1m}' & 0 & (z - cz^3) N_2' Y_{2m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_m^{3N_x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_1' Y_{1m} & H_2' Y_{1m} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_3' Y_{1m} & H_4' Y_{1m} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_m^{N_y} = \mathbf{B}_m^{1N_y} + \mathbf{B}_m^{2N_y} + \mathbf{B}_m^{3N_y}$$

$$\mathbf{B}_m^{1N_y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{bmatrix} N_1 Y_{1m}' & 0 & -cz^3 H_1' Y_{1m}' & -cz^3 H_2' Y_{1m}' & (z - cz^3) N_1 Y_{1m}' & 0 \\ N_2 Y_{1m}' & 0 & -cz^3 H_3' Y_{1m}' & -cz^3 H_4' Y_{1m}' & (z - cz^3) N_2 Y_{1m}' & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{B}_m^{2N_y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & N_1 Y_{2m}' & -cz^3 H_1 Y_{1m}'' & -cz^3 H_2 Y_{1m}'' & 0 & (z - cz^3) N_1 Y_{2m}' \\ 0 & N_2 Y_{2m}' & -cz^3 H_3 Y_{1m}'' & -cz^3 H_4 Y_{1m}'' & 0 & (z - cz^3) N_2 Y_{2m}' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_m^{3N_y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_1 Y_{1m}' & H_2 Y_{1m}' & 0 & 0 & 0 & 0 & H_3 Y_{1m}' & H_4 Y_{1m}' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

روابط نوار محدود می‌توانند به فرم ماتریسی نیز بیان شوند.

$$(\mathbf{K} - N_x \mathbf{K}_{gx} - N_y \mathbf{K}_{gy}) = 0 \quad (27)$$

در حالیکه ماتریس سختی  $\mathbf{K}$  به صورت

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} dV \quad (28)$$

و ماتریس‌های هندسی  $\mathbf{K}_{gx}$ ،  $\mathbf{K}_{gy}$  به صورت زیر می‌باشند.

$$\mathbf{K}_{gx} = \int_V \frac{N_x}{h} (\mathbf{B}^{1N_x})^T \mathbf{B}^{1N_x} dV + \int_A \frac{N_x}{h} (\mathbf{B}^{2N_x})^T \mathbf{B}^{2N_x} dV + \int_A \frac{N_x}{h} (\mathbf{B}^{3N_x})^T \mathbf{B}^{3N_x} dV \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_{gy} = \int_V \frac{N_y}{h} (\mathbf{B}^{1N_y})^T \mathbf{B}^{1N_y} dV + \int_V \frac{N_y}{h} (\mathbf{B}^{2N_y})^T \mathbf{B}^{2N_y} dV + \int_V \frac{N_y}{h} (\mathbf{B}^{3N_y})^T \mathbf{B}^{3N_y} dV \quad (30)$$

بنابراین به کمک برنامه نویسی و حل مسئله مقادیر ویژه می‌توان بار بحرانی کمانش را مطابق رابطه زیر محاسبه نمود.

$$|\mathbf{K} - N_x \mathbf{K}_{gx} - N_y \mathbf{K}_{gy}| = 0 \quad (31)$$



در صورت حل کمانش در یک جهت، به طور مثال در راستای  $y$  مقدار  $N_x = 0$  و کمانش در دو جهت،  $N_x$  نسبتی از  $N_y$  در نظر گرفته می‌شود.

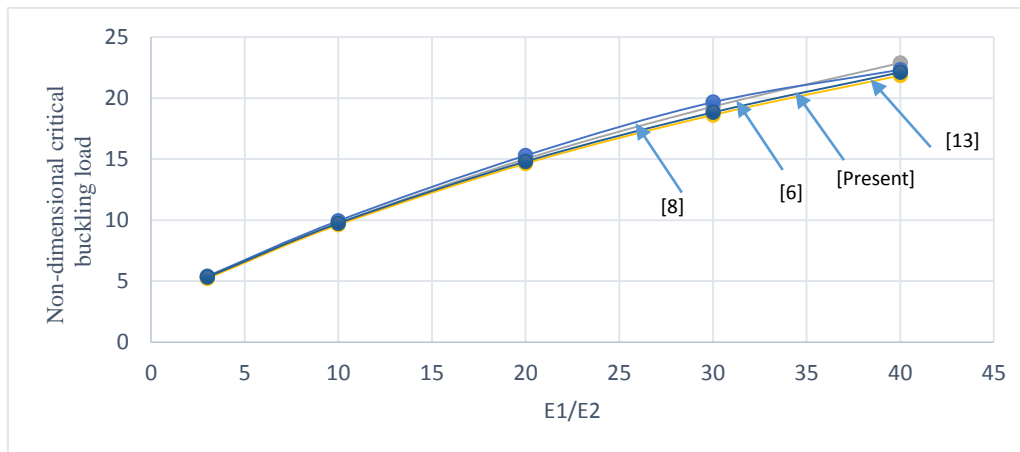
### ۳. مقایسه و صحت سنجی

در این بخش برخی از مسائل کمانش ورق‌های ضخیم لایه‌ای کامپوزیت با استفاده از روش نوار محدود با مقالات دیگر با در نظر گرفتن پارامترهای مختلفی چون نسبت مدول الاستیسیته، نسبت ابعاد به ضخامت و جهات مختلف قرارگیری الیاف و کمانش در یک و دو راستا بررسی می‌شود. در تمامی مثال‌ها تعداد نوارها ۱۰ و تعداد هارمونیک‌ها ۱ می‌باشد.

### ۱.۳. ورق‌های مربعی تحت فشار در یک جهت

ورق‌ها مربعی با طول ضلع  $a$  و ضخامت  $h$  با ترتیب قرارگیری لایه‌ها به صورت متعامد  $[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$  هستند و از لایه‌های با ضخامت یکسان تشکیل شده‌اند همچنین همه لایه‌های آن‌ها دارای تکیه‌گاه ساده بوده و تحت بار فشاری یکنواخت در یک جهت هستند و نتایج در جداول ۱-۳ و همچنین شکل ۲ آورده شده‌اند. بار بحرانی بدون بعد کمانش به صورت  $\bar{N} = N_{cr} a^2 / (E_2 h^3)$  و خواص لایه‌ها یکسان بوده و به صورت زیر است:

$$E_1 / E_2 = \text{varied}; G_{12} = G_{13} = 0.6E_2; G_{23} = 0.5E_2; \nu_{12} = 0.25$$



شکل ۲- بار بحرانی بدون بعد کمانش ورق مربعی با لایه‌های متعامد  $[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$  با نسبت  $E_1 / E_2$  های مختلف

جدول ۱- بار بحرانی بدون بعد کمانش ورق مربعی با لایه‌های متعامد  $[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$  با نسبت  $E_1 / E_2$  های مختلف

$a/h = 10$	$E_1 / E_2$				
	3	10	20	30	40
HSDT [7]	5.114	9.774	15.298	19.957	23.34
HSDT [9]	5.442	10.026	15.418	19.813	23.489
HSDT(Chein) [14]	5.4418	10.0208	15.4010	19.7810	23.4383
Present Study	5.3159	9.8125	15.1255	19.4751	23.1251

جدول ۲- بار بحرانی بدون بعد کمانش ورق مربعی با لایه‌های متعامد  $[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$  با نسبت  $a/h$  های مختلف

$E_1 / E_2 = 40$	$a/h$			
	10	20	50	100
HSDT (Reddy and Phan) [8]	23.349	31.637	35.419	35.971
MISQ20 [11]	23.236	31.747	35.561	36.19
HSDT(Chein) [14]	23.4383	31.9203	35.6923	36.3140
Present Study	23.1251	31.5519	35.3246	35.9472

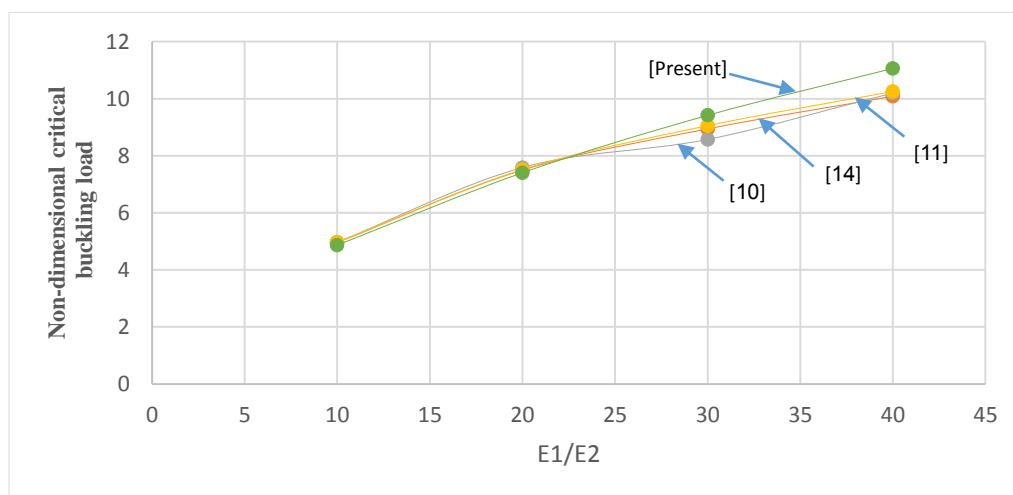


جدول ۳- بار بحرانی بدون بعد کمانش ورق مربعی با لایه‌های متعامد  $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$  با نسبت  $E_1 / E_2$  های مختلف

$a / h = 10$	$E_1 / E_2$				
	3	10	20	30	40
Reddy and Phan, HSDT [8]	5.4096	10.1500	16.0080	20.9990	25.3080
3-D Elasticity [6]	5.3255	9.9603	15.6527	20.4663	24.5929
Singh and Chakrabarti [13]	5.2750	9.8943	15.5177	20.2477	24.2896
Present Study	5.3290	9.9596	15.6108	20.3741	24.4568

### ۲.۳. ورق‌های مربعی تحت فشار در دو جهت

ورق‌ها مربعی با طول ضلع  $a$  و ضخامت  $h$  با ترتیب قرارگیری لایه‌ها به صورت متعامد  $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$  هستند و از لایه‌های با ضخامت یکسان تشکیل شده‌اند همچنین همه لبه‌های آن‌ها دارای تکیه‌گاه ساده بوده و تحت بار فشاری یکنواخت در دو جهت هستند و نتایج در جدول ۴ و همچنین شکل ۳ آورده شده‌اند. بار بحرانی بدون بعد کمانش به صورت  $\bar{N} = N_{cr} a^2 / (E_2 h^3)$  و خواص لایه‌ها مانند مثال قبل است.



شکل ۳- بار بحرانی بدون بعد کمانش ورق مربعی با لایه‌های متعامد  $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$  با نسبت  $E_1 / E_2$  های مختلف

جدول ۴- بار بحرانی بدون بعد کمانش ورق مربعی با لایه‌های متعامد  $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$  با نسبت  $a / h$  های مختلف

$E_1 / E_2 = 40$	$a / h$		
	2	5	10
TSDT [9]	1.465	5.526	10.259
TSDT [12]	1.457	5.519	10.251
HSDT(Chein) [14]	1.4518	5.4315	10.0871
Present Study	1.4533	5.3370	10.9512



#### ۴. نتیجه گیری

در این مقاله، روش نوار محدود برای تحلیل کمانش ورق‌های ضخیم لایه‌ای کامپوزیت براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی با استفاده از توابع مثلثاتی که شرایط مرزی در راستای طولی و توابع چندجمله‌ای هرمیتی و لاگرانژ در راستای عرضی ارضاء می‌کنند، ارائه گردید. در روش نوار محدود و براساس روش کاری مجازی ماتریس‌های سختی و هندسی محاسبه شدند. برای کرنش‌های برشی، یک توزیع درجه دو در امتداد ضخامت ورق در نظر گرفته شده و تنش‌های برشی در سطوح بالایی و پایینی ورق صفر منظور شده است. و از مزایای روش ارائه شده دقت بیشتر نسبت به روش نوار محدود بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است که احتیاج به ضریب اصلاح برش را در محاسبه‌ی تنش‌های برشی عرضی مرتفع می‌سازد. نتایج با مقالات دیگر مقایسه گردید و جدول‌ها و نمودارها صحت و دقت روش ذکر شده را نشان دادند.

#### ۵. مراجع

- Przemieniecki, J.S. (1973), "Finite Element Structural Analysis of Local Instability," *AIAA. Journal*, **11** (1), pp 33-39.
- Cheung, M.S. and Cheung, Y.K. (1971), "Natural Vibrations of Thin, Flat-Walled Structures with Different Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, **18** (3), pp 325-337.
- Plank, R.J. and Wittrick, W.H. (1974), "Buckling Under Combined Loading of Thin Flat-Walled Structures By a Complex Finite Strip Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **8**, pp 323-339.
- Azhari, M. and Bradford, M. A. (1995), "the Use of Bubble Functions for the Post-Local Buckling of Plate Assemblies By the Finite Strip Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, pp 955-968.
- Amoushahi, H. and Azhari, M. (2014), "Static and Instability Analysis of Moderately Thick Viscoelastic Plates Using a Fully Discretized Nonlinear Finite Strip Formulation," *Composite: Part B*, **56**, pp 222-231.
- Noor, A.K. (1975), "Stability of Multilayered Composite Plates," *Fibre Science and Technology*, **8** (2), pp 81-89.
- Phan, N.D. and Reddy, J.N. (1985), "Analysis of Laminated Composite Plates Using a Higher-Order Shear Deformation Theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, pp 2201-2219.
- Reddy, J.N. and Phan, N.D. (1985), "Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates according To a Higher Order Shear Deformation Theory," *Journal of Sound and Vibration*, **89**, pp 157-170.
- Khdeir, A.A. and Librescu, L. (1988), "Analysis of Symmetric Cross-Ply Elastic Plates Using a Higher-Order Theory. Part ii: Buckling and Free Vibration," *Composite Structures*, **9**, pp 259-277.
- Fares M.E. and Zenkour, A.M. (1999), "Buckling and Free Vibration of Non-Homogeneous Composite Cross-Ply Laminated Plates with Various Plate Theories," *Composite Structures*, **44**, pp 279-287.
- Nguyen-Van, H., Mai-Duy, N., Karunasena, W. and Tran-Cong, T. (2011), "Buckling and Vibration Analysis of Laminated Composite Plate/Shell Structures via a Smoothed Quadrilateral Flat Shell Element with In-Plane Rotations," *Composite Structures*, **89**, pp 612-625.
- Liu, L., Chua, L.P. and Ghista, D.N. (2007), "Mesh-Free Radial Basis Function Method for Static, Free Vibration and Buckling Analysis of Shear Deformable Composite Laminates," *Composite Structures*, **78**, pp 58-69.
- Singh, S.K. and Chakrabarti, A. (2012), "Buckling analysis of laminated composite plates using an efficient  $C^0$  FE model," *Latin American Journal of Solids and Structures*, **9** (3), pp 1-13.
- Thai, C.H., Tran, L.V., Tran, D.T., Nguyen-Thoi, T. and Nguyen-Xuan, H. (2012), "Analysis of Laminated Composite Plates Using Higher-Order Shear Deformation Plate Theory and Node-Based Smoothed Discrete Shear Gap Method," *Applied Mathematical Modelling*, **36** (11), pp 5657-5677.