Submitted to the 5st Seminar on Harmonic Analysis and Applications
Organized by the Iranian Mathematical Society
January 18–19, 2017, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

ابرگروهواره‌های توپولوژیکی

شریفه دیالی[۱] * و غلامرضا رضایی[۲]

[۱] آدرس ۱
sdialli1992@gmail.com
[۲] آدرس ۲
grezaei@hamoon.usb.ac.ir
[۳] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده. ابرگروه‌ها تعمیمی از گروه‌ها هستند. اگر یک ابرعمل دوتایی قابل تعریف همراه با چندارزشی بودن باشد، در این‌صورت به یک ابرگروه منجر می‌شود. انگیزه برای تعمیم نظریه گروه به طور طبیعی ازمسائل مختلف در جبر ناجابجایی نتیجه می‌شود انگیزهٔ دیگری برگرفته از هندسه است. در چندین شاخه از ریاضیات با مثال‌های مهمی از ساختارهای توپولوژی- جبری مواجه شدیم. مانند: گروه‌ها، حلقه‌ها، میدان‌ها، گروهواره‌های توپولوژی و ... .در این نوشته، انواع مختلف از پیوستگی ابرعمل‌ها معرفی خواهیم کرد. برای مثال: رابطه بین شبه پیوستگی، شبه پیوستگی قوی و ابرعمل‌های پیوسته مطالعه خواهیم کرد. هدف کلی تعمیم مفهوم گروهواره توپولوژیکی به ابرگروهواره توپولوژیکی است.

۱. پیش‌گفتار

ابرگروه‌ها تعمیمی از گروه‌ها(مجموعه با یک عمل دوتایی روی آن و تعدادی از شرایط برقرار است) هستند. اگر این عمل دوتایی قابل تعریف همراه با چند ارزشی کردن باشد در این‌صورت به یک ابرگروه منجر می‌شود. ایده برای تعمیم دادن نظریهٔ گروه به‌طور طبیعی از چندین مسائل در جبر تعویض‌ناپذیر نتیجه گرفت. ایدهٔ دیگری برای این تحقیق از هندسه بدست آمد. نظریه ابرگروه‌ها در سال ۱۹۳۴ با مقاله مارتی درکنگره هشتم ریاضیدانان اسکاندیناوی در استکهلم[۲] پدیدار شد. پس از آن در سراسر دههٔ ۴۰ با همکاری نویسندگان مختلف مخصوصاً در فرانسه، ایتالیا، یونان وایالات متحده توسعه یافت. برای مثال، طی دهه‌های زیر مطالب ونتایج جدید ظاهر شد. اما بیشتر از همه شکوفایی انبوه‌تر از ابرساختارها در ۳۰ سال گذشته دیده شده است. در طی این سال‌ها، ابرگروه‌ها در جبر، هندسه، محدب(کوژی) و نظریهٔ ماشین‌ها استفاده شده است. مسئله‌های ترکیبی از رنگ آمیزی، تئوری شبکه، جبر بولی، منطق و ... مورد استفاده بوده است ([۴]).

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 99X99, Secondary 99Y99.
واژگان کلیدی. ابرگروهواره؛ ابرعمل؛ پیوستگی؛ توپولوژی ابرعمل پیوسته‌نما؛ ابرگروهوارهٔ توپولوژیکی .
* سخنران

۲. مفاهیم مقدماتی

ابتدا شرایط کلی و تعاریف نظریهٔ ابرساختارها یادآوری می‌کنیم ([۴] ببینید).

تعریف ۱.۲. *فرض کنید H یک مجموعهٔ ناتهی و $\mathcal{P}^*(H)$ مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های ناتهی از H باشد. در این‌صورت زوج $(H,\cdot)$ یک ابرگروهواره است، به‌طوری‌که $\cdot : H \longrightarrow \mathcal{P}^*(H)$ یک ابرعمل دوتایی روی مجموعهٔ H است. اگر به‌ازای هر $a,b,c \in H$، $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ (قاعدهٔ شرکت‌پذیری) برقرار باشد آنگاه $(H,\cdot)$ نیم‌ابرگروه است. نیم‌ابرگروه $(H,\cdot)$ یک ابرگروه نامیده می‌شود اگر پیرو قاعدهٔ همانی باشد به‌ازای هر $a \in H$، $a\cdot H = H = H\cdot a$. در ادامه، برای $A,B \subseteq H$، $A \neq \emptyset \neq B$ تعریف می‌کنیم $A\cdot B = \bigcup\{a\cdot b : a \in A, b \in B\}$. عبارت‌های aA و Aa برای $\{a\}\cdot A$ و $A\cdot\{a\}$ استفاده شده است. به‌طور کلی مجموعهٔ تک عضوی $\{a\}$ با عنصر a شناسایی شده است. عبارت $A \approx B$ یعنی A مجموعهٔ B را قطع می‌کند. به‌عبارتی دیگر $A \bigcap B \neq \emptyset$.*

به‌وسیله تعریف گروهواره توپولوژیکی [۱] نمونه‌های زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۲. *فرض کنید $(H,\cdot)$ یک ابرگروهواره و (H,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد. ابرعمل "$\cdot$" پیوسته‌نما یا به اختصار P - پیوسته می‌نامیم اگر به‌ازای هر $O \in \tau$ مجموعهٔ $O_* = \{(x,y) \in H\times H : x\cdot y \subseteq O\}$ در $H\times H$ باز باشد.*

تعریف ۳.۲. *فرض کنید $(H,\cdot)$ ابرگروهواره و $(H.\tau)$ فضای توپولوژیکی باشد. ابرعمل "$\cdot$" پیوسته‌نمای قوی یا به اختصار SP -پیوسته نامیده می‌شود به‌ازای هر $O \in \tau$ مجموعهٔ $O^* = \{(x,y) \in H\times H : x\cdot y \approx O\}$ در $H\times H$ باز است.*

ابرعمل "$\cdot$" پیوسته‌نما است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $O \in \tau$ و هر زوج $(x,y) \in H\times H$ که $x\cdot y \subseteq o$، برای هر $x \in U$ و $y \in V$ وجود دارد $U,V \in \tau$ به طوریکه $u\cdot v \subseteq O$. مشابهاً، ابرعمل "$\cdot$"، SP -پیوسته است اگر وفقط اگر به‌ازای هر $O \in \tau$ و هر زوج $(x,y) \in H\times H$ وجود دارد $U,V \in \tau$ و $x \in U$ و $y \in V$ در این‌صورت $x\cdot y \approx O$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $u \in U$ و $v \in V$ داریم $u\cdot v \approx O$.

تعریف ۴.۲. *فرض کنید $(H,\cdot)$ یک ابرگروهواره و (H,τ) یک فضای توپولوژیکی و τ_* یک توپولوژی روی $\mathcal{P}^*(H)$ باشد. ابرعمل "$\cdot$"، τ_* - پیوسته می‌نامیم اگر نگاشت $\cdot : H\times H \longrightarrow \mathcal{P}^*(H)$ نسبت به توپولوژی‌های $\tau\times\tau$ و τ_* پیوسته باشد.*

تعریف ۵.۲. *فرض کنید $(H,\cdot)$ یک ابرگروهواره، (H,τ) فضای توپولوژی و τ_* یک توپولوژی روی $\mathcal{P}^*(H)$ باشد. سه‌تایی $(H,\cdot,\tau)$ یک توپولوژی‌نما یا ابرگروهواره توپولوژی‌نمای قوی می‌نامیم اگر ابرعمل "$\cdot$" به‌ترتیب پیوسته‌نما یا پیوسته قوی باشد.*

چهارتایی $(H,\cdot,\tau,\tau_*)$، ابرگروهواره τ_* - توپولوژیکی نامیم اگر ابرعمل "$\cdot$"، τ_* -پیوسته باشد.

لم ۶.۲. *فرض کنید (X,τ) d یک فضای توپولوژی باشد، در این‌صورت خانواده $\mathcal{U}$ ، برای هر $V \in \tau$ متشکل از همه مجموعه‌های $S_v = \{U \in \mathcal{P}^*(H) : U \subseteq V\}$ پایه‌ای از توپولوژی τ_v روی $\mathcal{P}^*(H)$ است. این توپولوژی را توپولوژی پائینی روی $\mathcal{P}^*(H)$ می‌نامیم.*

قضیه ۷.۲. *فرض کنیم $(H,\cdot)$ یک ابرگروهواره و (H,τ) فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه سه‌تایی $(H,\cdot,\tau)$ ابرگروهوارهٔ توپولوژی‌نما است اگر و فقط اگر چهارتایی $(H,\cdot,\tau,\tau_{\mathcal{U}})$ یک ابرگروهوارهٔ $\tau_{\mathcal{U}}$ -توپولوژیکی باشد.*

لم ۸.۲. *اگر (H,τ) فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه خانوادهٔ $\mathcal{L}$ شامل همهٔ مجموعهٔ $I_V = \{U \in \mathcal{P}^*(H) : U \approx V\}$ و $V \in \tau$ زیرپایه‌ای برای $\tau_{\mathcal{L}}$ روی $\mathcal{P}^*(H)$ است. که این نوع توپولوژی پائینی می‌نامیم.*

قضیه ۹.۲. *فرض کنیم $(H,\cdot)$ ابرگروهواره و (H,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه سه‌تایی $(H,\cdot,\tau)$ ابرگروهوارهٔ توپولوژی‌نمای قوی است اگر و تنها اگر چهارتایی $(H,\cdot,\tau,\tau_{\mathcal{L}})$ یک ابرگروهوارهٔ $\tau_{\mathcal{L}}$ -توپولوژیکی باشد.*

۳. نتایج اصلی

در سال ۱۹۲۲ یک ریاضیدان اتریشی به نام ویتوریس [۵] یک توپولوژی روی مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های بسته ناتهی از فضای توپولوژیکی (H,τ) تعریف کرد. در پوششی از یک فضای متریک بسته- فشرده X این توپولوژی برابر با توپولوژی القایی به‌وسیلهٔ "متر هاسدورف" خوانده می‌شود و رویکردش می‌تواند با مجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های ناتهی (H,τ) کاربردی باشد. به روش زیر آن را تشریح می‌کنیم:

لم ۱.۳. *فرض کنیم (H,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد. به‌ازای هر U_k ,$U_1, U_2, \cdots$ و $k \in \mathbb{N}$ و به‌ازای $i = 1, 2, \cdots, k$ ،$U_i \in \tau$ تعریف می‌کنیم:*

$$\mathcal{V}(U_1, U_2, \cdots, U_k) = \left\{ B \in \mathcal{P}^*(H) : B \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i, B \approx U_i \right\}$$

خانوادهٔ $\mathcal{B}$ از همهٔ مجموعه‌های $\mathcal{V}(U_1, U_2, \cdots, U_k)$ تشکیل یک پایه برای فضای توپولوژیکی $(\mathcal{P}^*(H), \tau_{\mathcal{V}})$ می‌دهد.

تعریف ۲.۳. *توپولوژی $\tau_{\mathcal{V}}$ در لم قبل توپولوژی ویتوریس روی $\mathcal{P}^*(H)$ نامیده می‌شود.*

لم ۳.۳. *توپولوژی ویتوریس $\tau_{\mathcal{V}}$ تظریف مشترک توپولوژی‌های بالایی $\tau_{\mathcal{U}}$ و پائینی $\tau_{\mathcal{L}}$ است.*

قضیه ۴.۳. *اگر (H,τ) فضای توپولوژیکی و $(H,\cdot)$ یک ابرگروهواره باشد. سه‌تایی $(H,\cdot,\tau)$ هم ابرگروهوارهٔ توپولوژی‌نما و هم ابرگروهوارهٔ توپولوژی‌نمای قوی است اگر و تنها اگر چهارتایی $(H,\cdot,\tau,\tau_{\mathcal{V}})$ یک $\tau_{\mathcal{V}}$ -ابرگروهواره باشد.*

مراجع

1. R. Ameri, Topological (transposition) hypergroups, Italian Journal Pure Appllied Mathematics (13) (2003) 171 –176.

2. F. Marty, Sur une généralisation de la notion de groupe. in: Huitième Congr. Math. Scan., 1934, Stockholm, pp. 45–49.

3. B. Davvaz, J. Zhan, K.H. Kim, Fuzzy-hypernear-rings, Computers Mathematics with Applications 59 (8) (2010) 2846–2853.

4. P. corsini,V. Leoreanu, Applications of Hyperstructur theory, Kluwer Academic Publishers, Dordercht, Hardbound, 2003.

5. L. Vietoris, Bereiche zweiter Ordnung, Monatshefte für Mathematik und Physik. Akademische Verlags-Gesellschaft 32 (1922) 258–280.