Submitted to the 5st Seminar on Harmonic Analysis and Applications
Organized by the Iranian Mathematical Society
January 18–19, 2017, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

پنجمین سمینار آنالیز هارمونیک و کاربردها
5th Seminar on Harmonic Analysis and Applications

نوع جدید کامل‌سازی در فضای متریک

سمیرا دهمرده [1] * و جواد جمالزاده[2]

[1] آدرس ۱
Dahmardeh878@gmail.com
[2] آدرس ۲
jamalzadeh1980@math.usb.ac.ir
[3] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده. این مقاله به معرفی و مطالعه دو نمونه از خواص جدید کامل بودن در فضای متریک می‌پردازد که ما آنها را بورباکی-کامل و بورباکی-کامل هم‌پایان می‌نامیم.
هم‌چنین به مطالعه مسائل توپولوژیکی متریک‌پذیر با استفاده از بورباکی-کامل یا بورباکی-کامل هم‌پایان می‌پردازیم و شرایط معادل بورباکی-کوشی بودن را مانند کوشی بودن برای دنباله‌ها بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمه

برخی از کلاسهای فضاهای متریک خواصی قویتر از کامل بودن و ضعیفتر از فشردگی دارند که اخیرا توسط بسیاری از نویسندگان مورد مطالعه قرار گرفته، یک مرجع خوب برای این نوع مقاله بییر [۱] تحت عنوان رابط بین فشردگی و کامل بودن می‌باشد.
مثالی از این خواص فشردگی کراندار، فشردگی موضعا یکنواخت کامل‌سازی هم‌پایان، کامل بودن هم‌پایان قوی که اخیرا توسط بییر در [۳] معرفی شده همچنین برای فضای متریک UC-پذیر نامیده می‌شود.
مطالعه همه این فضاها تمام آن چیزی را که می‌خواهیم به ما نمی‌دهد اما ارتباطی با بعضی مسائل در آنالیز محدب، قضایای بهینه‌سازی و در زمینه ساختار همگرایی روی ابرفضاها را به‌وجود می‌آورد.
هدف کلی این مقاله معرفی دوتایی‌های جدید این خواص متوسط در زمینه فضای متریک است.
اول از همه توجه داشته باشید که یک راه برای رسیدن به یک ویژگی قوی‌تر از کامل بودن برای فضای متریک خوشه‌ای از همه دنباله‌های متعلق به برخی کلاسهای بزرگتر از کلاسهای دنباله‌های کوشی می‌باشد.بدین ترتیب در بخش ۳ کلاس‌هایی از دنباله بورباکی-کوشی و دنباله بورباکی کوشی هم پایان تعریف می‌کنیم.
این دنباله در فضای متریک ظاهر می‌شود و به اصطلاح مجموعه بورباکی-کراندار نامیده می‌شود. این نظریه کرانداری توسط آتسوجی در [۱] به منظور نشان دادن فضای متریک بطوریکه هر تابع پیوسته یکنواخت حقیقی کراندار است. معرفی شده، اما لزوما کلا کراندار نیست.
نام بورباکی-کراندار از کتاب بورباکی آمده که این زیرمجموعه در فضای یکنواخت مطرح شده است.
در اینجا ثابت می‌کنیم که زیرمجموعه‌های بورباکی-کراندار از فضای متریک می‌تواند مشخص شود به فرم دنباله‌هایی که دنباله‌های کوشی را برای کلا کرانداری مشخص می‌کند.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 99X99, Secondary 99Y99.

واژگان کلیدی. بورباکی-کوشی؛ بورباکی-کرانداری؛ بورباکی-کامل .

* سخنران

بنابراین نوع جدیدی از دنباله‌ها ظاهر می‌شود که آنرا بورباکی-کوشی می‌نامیم.
دسته‌ای دیگر از دنباله‌ها را که هم‌پایان هستند را تولید می‌کنیم.
به این معنا که باقیمانده‌ای از شاخص جایگزین توسط هم‌پایانی است. بنابراین آنچه را که دنباله بورباکی-کشی می‌نامیم بدست آوردیم.

۲. نتایج مقدماتی

برای فضای متری (X, d)، معنی می‌کنیم $B_\varepsilon(X)$، گوی بازی‌ست به مرکز $x \in X$ و شعاع $\varepsilon > ۰$. و برای هر زیرمجموعه A از X و $\varepsilon > ۰$ می‌نویسیم، ε-بزرگی از A توسط،

$$A^\varepsilon = \cup\{B_\varepsilon(x).x \in A\} = \{y : d(y, A) < \varepsilon\}$$

در طول مقاله زیر دنباله $n^t\ \varepsilon - enlargmeat$ از گوی باز $B_\varepsilon(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: برای هر $n \geq ۲$

$$B_\varepsilon^۱ = B_\varepsilon(x)$$

$$B_\varepsilon^n := (B_\varepsilon^{n-۱}(x))^\varepsilon.$$

در پایان تعریف می‌کنیم مؤلفه ε-زنجیرپذیر $(\varepsilon - cheinable\ conponeat)$ را در $x \in X$ به‌صورت،

$$B_\varepsilon^\infty = \bigcup_{n \in N} B_\varepsilon^n.$$

بخاطر بیاورید که فضای متریک یک زیر مجموعه کراندار (متریک) گفته می‌شود. اگر قطر متناهی باشد. به این فضا که مشمول در یک گوی باز باشد.
این مفهوم از کرانداری کاملا طبیعی است اما برخی از آنها ناسازگارند. به‌عنوان مثال متر کراندار، پایانی یکنواخت نیست. به این معنا که تحت یکنواختی همئومورفیسم محفوظ نیست.
بنابراین در زمینه فضاهای متریک نرم‌دار، کرانداری یک ویژگی یکنواختی و در حقیقت زیرمجموعه‌های کرانداری است که با استفاده از توابع پیوسته یکنواخت مشخص می‌شود.
در واقع به آسانی می‌بینیم که زیرمجموعه B از غضای نرم‌دار X توسط نرم کراندار است اگر و فقط اگر برای هر تابع حقیقی پیوسته یکنواخت f از X، $f(B)$ با متر معمولی در R کراندار باشد.
همانطور که در مقدمه گفته شد، آتسوجی در [۱] مفهوم بورباکی کرانداری را در فضای متری مطرح کرد (تحت نام به‌طور متناهی زنجیرپذیر فضای متریک) و نشان داد که آنها فقط فضاهای متریک هستند که بر روی آن تصویر کراندار تحت هر تابع حقیقی پیوسته یکنواخت تعریف می‌شود.
این فضاها در قالب فضاهای یکنواخت توسط حجمن در [۵] مطرح شده است که آنها را کراندار نامیده.

تعریف ۱.۲. زیر مجموعه B از فضای متریک (X, d)، زیرمجموعه بورباکی-کراندار X نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشد $m \in N$ و یک مجموعه متناهی از نقاط $p_۱, \cdots, p_k \in X$ به‌طوریکه $B \subset \bigcup_{i=۱}^k B_\varepsilon^m(p_i)$.

توجه داشته باشید که خانواده B از همه زیرمجموعه‌های بورباکی-کراندار از X به شکل برنولوژی در X است که B در شرایط زیر است

(i) برای هر $x \in X$ مجموعه $\{x\} \in B$
(ii) اگر $B \in \mathbb{B}$ و $A \subseteq B$ بنابراین $A \in \mathbb{B}$
(iii) اگر $A, B \in \mathbb{B}$ پس $A \cup B \in \mathbb{B}$

از سویی دیگر اگر در تعریف ۱.۲ بالا داشته باشیم $m = ۱$ (یا $m \leq m_۰$ برای هر $m_۰ \in N$) برای هر $\varepsilon > ۰$ بنابراین ما مفهوم کلاسیکی از زیرمجموعه‌های کلا کراندار دریافت می‌کینم.
از اینرو هر زیرمجموعه کلا کراندار در بورباکی-کراندار خاص است و به روشنی می‌بینیم که هر زیرمجموعه بورباکی کراندار در مفهوم معمولی کراندار خاص است.

۳. نتایج اصلی

برای اطلاعات بیشتر در مورد ارتباط میان این سه مفهوم متفاوت کرانداری به[۴] مراجعه می‌کنیم به طوری که همه آنها را به طور کلی برنولوژی جهانی می‌نامیم.
توجه داشته باشید که یک زیرمجموعه بورباکی-کراندار ویژگی ذاتی نیست یعنی بستگی به فضای محیطی دارد که در آن هستیم. در حقیقت خواهیم دید که یک زیرمجموعه در X می‌تواند بورباکی-کوشی باشد اما نه به خودی خود.

قضیه ۱.۳. فرض کنید (X,d) فضای متریک باشد. عبارات زیر معادلند:

(۱) X یک فضای متریک بورباکی-کراندار است.
(۲) برای هر تابع حقیقی پیوسته f از X، $f(X)$ در R کراندار است.
(۳) برای هر متر d' به‌طور یکنواخت معادل به d، d'-کراندار در X است.
(۴) هر پوشش یکنواخت ستاره-متناهی از X متناهی است.

ما در حال توصیف دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بورباکی-کراندار از فضای متریک هستیم. اولا به معرفی مفاهیم بورباکی-کوشی دنباله بورباکی-کوشی همپایان نیاز داریم.

تعریف ۲.۳. فرض کنید (X,d) فضای متریک باشد. دنباله $(x_n)_{n\in N}$ در X بورباکی-کوشی است اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشد $m \in N$ و $n. \in N$ به‌طوریکه برای هر $p \in X$ داشته باشیم $x_n \in B^m_\varepsilon(p)$ برای هر $n \geq n.$. از سویی دیگر، $(x_n)_{n\in N}$ بورباکی-کوشی هم‌پایان در X است اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشد $m \in N$ و زیر مجموعه $N_\varepsilon \subset N$ به‌طوریکه برای هر $p \in X$ داشته باشیم $x_n \in B^m_\varepsilon(p)$ برای هر $n \in N_\varepsilon$.

قضیه ۳.۳. برای فضای متریک (X,d) و $B \subset X$ عبارات زیر معادلند:

(۱) B زیرمجموعه بورباکی-کراندار در X است.
(۲) هر زیرمجموعه شمارا از B زیرمجموعه بورباکی-کراندار در X است.
(۳) هر دنباله در B یک زیردنباله بورباکی-کوشی در X است.
(۴) هر دنباله در B، بورباکی-کوشی هم‌پایان در X است.

مثال ۴.۳. در اعداد حقیقی R با متر معمولی، شامل دنباله $q_۱, ۱, q_۲, ۲, q_۳, ۳, \cdots, q_n, n, \cdots$ به طوری که $\{q_۱, q_۲, \cdots, q_n, \cdots\}$ شمارش‌پذیر از مجموعه $Q \cap (۰, ۱)$ است بنابراین این دنباله مجموعه کراندار نیست و از اینرو یک زیرمجموعهٔ بورباکی -کراندار نیست و نه یک زیرمجموعه بورباکی-کوشی در R. از سویی دیگر به آسانی چک می‌کنیم که دنباله هم‌پایان کوشی (نه کوشی) است و از اینرو دنباله بورباکی-کوشی در R است.

مثال ۵.۳. فرض کنید $(l_۲, \|\cdot\|)$ فضای هیلبرت کلاسیک از همه‌ی دنباله‌های جمع‌پذیر مربع اعداد حقیقی باشدو فرض کنید $B = \{e_n : n \in N\}$ پایه استاندارد باشد، B به عنوان زیرمجموعه $l_۲$ در کل فضا بورباکی-کراندار است.
یک زیرمجموعه بورباکی-کراندار از خودش نیست. زیرا فضای متریک گسسته یکنواخت نامتناهی است. در حقیقت در فضای $(B, \|\cdot\|_B)$ و برای $\varepsilon = ۱$ داریم $B^m_\varepsilon(e_n) = \{e_n\}$، برای هر $m, n \in N$. از اینرو دنباله $(e_n)_{n\in N}$ در $l_۲$، بورباکی -کوشی (کوشی نیست) است. اما در خودش بورباکی-کوشی نیست. علاوه بر این این دنباله در $l_۲$، بورباکی-کوشی هم‌پایاین است اما کوشی هم‌پایان نیست.

مراجع

1. Atsuji, M. Uniform continuity of continuous functions of metric spaces. Pancific J. Math. 8, 1958, 11-16.

2. Beer, G. Between compactness and completeness. Topology Appl. 155, 2008, 503, 514.

3. Beer, G. Between the cofinally complete spaces and the UC spaces. Houston J. Math. 38, 2012, 999-1015.

4. Garrido, I. and A. S. Merono. Some classes of bounded sets in metric spaces. In: Con-tribucionces matematicas en homenaje a Juan Tarres, eds. M. Castrillon et al. Universidad Complutense de Madrid, 2012, 179-186.

5. Hejcman, J. Boundedness in uniform spaces and topological groups. Czechoslovak Math. J. 9, 1959, 544-563.