

سومین کنفرانس سالانه پژوهش مای معاری، شهرسازی و مدیریت شهری

The third annual conference for research in architecture, urban planning and urban management



روش نوین تحلیل غیرخطی خرپاهای فضایی با استفاده از تئوری ریاضیاتی چندمتغیره هومیر

علی حسین زاده ^{(*} محمدحسین وفایی^۲ 1-کارشناسی ارشد سازه،موسسه غیرانتفاعی پویش قم،hosseinzadeh85@yahoo.com 2-استادیار، موسسه غیرانتفاعی پویش قم،m.h.vafaee2014@gmail.com

چکیدہ

عوامل موثر بر رفتار غیرخطی سازه ها شامل غیرخطی های هندسی و مصالح می باشند. تحلیل غیرخطی سازه های فضایی نهایتاً منجر به حل یک دستگاه پیچیده ی معادلات غیرخطی می گردد. در این مقاله سعی شده است تا روش حل معادلات غیرخطی بر پایه ی تئوری ریاضیاتی چندمتغیره هومیر به عنوان جایگزینی برای روش نیوتن-رافسون در تحلیل غیرخطی سازه های فولادی به کار گرفته شود. این روش حل دستگاه معادلات غیرخطی با مرتبه همگرایی 3 می باشد. مرتبه همگرایی بالای روش مذکور و کاهش معکوس سازی های ماتریس سختی که یکی از دشوارترین مراحل آنالیز محسوب می گردد موجب کاهش زمان محاسبات و تعدادگامهای مورد نیاز جهت دستیابی به پاسخ می گردد. نتایج حاصل از مطالعات عددی تایید کننده ی ارتقاء عملکرد روش تحلیل نوین غیرخطی برپایه این تئوری نسبت به روش شناخته شده نیوتن-رافسون می باشد.

کلمات کلیدی: تحلیل غیرخطی، خرپاهایفضایی ، روشهای نموی، روش نیوتن -رافسون، چندمتغیرههومیر



The third annual conference for research in architecture, urban planning and urban management



1- مقدمه:

امروزه روشهای تحلیل غیرخطی سازه ها که در آنها اثرات غیرخطی هندسی و مصالح دیده شده است مورد توجه مهندسین و محققین قرار گرفته اند. درچنین تحلیلی برخلاف تحلیل های خطی، ماتریس سختی در طول زمان بارگذاری (تکرارهای همگرایی و نموهای بار) ثابت باقی نمی ماند. با توجه به اینکه آنالیز غیرخطی نهایتاً منجر به حل دستگاه معادلات غیرخطی می گردد، جهت محاسبه ی پاسخهای تغییر مکانی سازه نیازمند یک الگوریتم توانا در زمینه ی حل دستگاه معادلات غیرخطی می باشیم. روش نيوتن-رافسون كه با استفاده از گراديان تابع و بصورت تكرار شونده اقدام به حل چنين دستگاه معادلاتي مي كند، توسط كاسيمالي و همكارانش براي تحليل غيرخطي خرپاها مورد استفاده قرار گرفت[1]. بعدها روش نيوتن رافسون اصلاح شده كه در آن از مشتق تابع به ازای نقطه ی حدس اولیه در تمام گامهای الگوریتم استفاده می گردید نیز در تحلیل غیرخطی خرپا استفاده شد. نیوتن رافسون اصلاح شده گرچه تعداد گامهای بیشتری جهت همگرایی حل دستگاه معادلات غیرخطی نیاز داشت اما با توجه به حذف عمل پرهزینه و زمان بر معکوس سازی ماتریس سختی نهایتاً کارایی بیشتری نسبت به روش نیوتن رافسون در حل دستگاه معادلات غیرخطی از خود نشان می داد. سیس ریکس روش طول قوس را ارائه نمود [2] و کریسفیلد این متدها را با بروز رسانی قيود ارتقاء داد[3]. براي مطالعه ي نقاط فروجهش در خرياها بليني يک مدل رياضياتي ساده ارائه کرد[4]. راگون و همکارانش سه الگوریتم متفاوت را مطالعه کردند و نتایج ناشی از آنها را با هم مقاسیه کردند[5]. اریکسون چندین روش برای عبور از نقاط حدی ارائه کرد که در آنها اثرات غیرخطی هندسی در نظر گرفته شده بود[6]. پایادراکاگیس و گانتس چندین روش برای کوتاه كردن زمان اجراى الگوريتم نيوتن رافسون ارائه كردند[7]. گرسيكو و همكاران يك فرمول بندى غيرخطى براى آناليز خرپاهاى فضایی معرفی نمودند که در آن بجای جابجایی های گرهی از مفهوم موقعیت گرهی استفاده شده بود[8]. تای و کیم آنالیز غیرخطی خرپاها را تحت غیرخطی های هندسی و مصالح به انجام رساندند[9]، صفاری و منصوری یک روش تحلیل غیرخطی ارائه نمودند که سرعت همگرایی را بالا می برد، آنها از تئوری دو نقطه ای برای کاهش زمان همگرایی استفاده کرده بودند[10]، آنها سپس روش سه نقطه ای را در ادامه روش دو نقطه ای بسط دادند[11]. کادو و همکاران دو روش تسریع کننده همگرایی که به عنوان روشهای اصلاح شده ی تخمین چندجمله ای حداقل و تخمین نموی شناخته می شوند ارائه کردند[12]. سپس صفاری و همکاران روش گرادیان مزدوج را در حل معادلات غیرخطی جایگزین روش نیوتن-رافسون کردند و کارایی بهتری از حل دستگاه معادلات غیرخطی بدست آمد. روش گرادیان مزدوج یک روش تکراری مناسب و محبوب برای یافتن پاسخ دستگاه معادلات خطی با حذف عملیات وارون سازی ماتریس سختی است که بایستی ماتریس ضرائب در آن ماتریس مربعی متقارن و دارای دترمینان مثبت باشد. دربعضي حالات تحليل غيرخطي ماتريس ضرائب تغيير شكلهاي محاسبه شده متقارن نيست بنابراين آنها روش ديگري تحت عنوان روش گرادیانی پیش شرط دار را ارائه کردند که توانایی یافتن پاسخ دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرائب نامتقارن و دارای دترمینان منفی را داراست. در این مقاله با استفاده از تکنیک محاسباتی چندمتغیره هومیر روشی ارائه شده است که ضمن همگرایی سریعتر در رسیدن به پاسخ، از تکرار معکوس سازی ماتریس سختی نیز جلوگیری شده است. نتایج حاصل از حل مثالهای عددي بيانگر كارايي و سرعت بالاي تحليل غيرخطي خرياها با استفاده از الگوريتم ياد شده مي باشد [17-13].

2- تحليل غيرخطى خرپاها:

در این مقاله خرپاها به عنوان یکی از دسته های پر استفاده سازه ها مورد بررسی قرار می گیرند و به جهت دریافت صحیح از روش تحلیل غیرخطی خرپا، روند انجام این تحلیل و همچنین ماتریس سختی یک المان خرپایی غیرخطی ارائه می گردد. درشکل شماره



(1) یک المان ساده ی خرپایی سه بعدی در حالت اولیه ی پیش از بارگذاری و همچنین درحالت تغییر شکل یافته ی پس از بارگذاری ارائه گردیده است[1].



شکل۱-المان خرپایی سه بعدی قبل و بعد از تغییر شکل

نقاط ابتدا و انتهای عضو پیش از بارگذاری با (P₁, (Y₁, Z₁X₁) و P₁, (Y₁, Z₁X₁) و P'₁(+V₁, Y₁+V₂, Z₁+ V₃X₁)

$$P'_{1}(+V_{1}, Y_{1}+V_{2}, Z_{1}+ V_{3}X_{1})$$

 $P'_{1}(+V_{1}, Y_{1}+V_{2}, Z_{1}+ V_{3}X_{1})$
 $P'_{1}(+V_{1}+V_{1})$
 $P'_{1}(+V_{1}-V_{1})$
 $P'_{1}(+V_{1}-V_{1})$
 $P'_{1}(+V_{2}-V_{1})$
 $P'_{1}(+V_{2}-V_{1})$
 $P'_{1}(+V_{2}-V_{1})$
 $P'_{1}(+V_{2}-V_{1})$
 $P'_{1}(+V_{2}-V_{2})$
 $P'_{2}(+V_{2}-V_{2})$
 $P'_{2}(+V_$

$$+\{(Z_2 - Z_1) + (V_6 - V_3)\}^2]^{1/2} \hat{L} = [\{(X_2 - X_1) + (V_4 - V_1)\}^2 + \{(Y_2 - Y_1) + (V_5 - V_2)\}^2$$
(4)

مطابق شکل شماره (2) در رابطه ی فوق L طول ثانویه ی عضو پس از تغییر شکل می باشد که به شکل رابطه ی(4) قابل



بنابراین نیروی محوری در خرپا به صورت زیر نمایش داده می شود.
(6)
$$Q = \frac{AE}{L} U$$
 (6)
(7) A و مدول الاستیسیته ماده تشکیل دهنده عضو با E نمایش داده شده است.
(7) T (7) P = $\{P\}$ (7)
(7) P (7) P



تعریف میشود و توان Tr نشان دهنده ماتریس ترانهاده است و ماتریس [g]به صورت زیر تعریف میشود.

$$[g] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -(m^{2} + n^{2}) & lm & ln & (m^{2} + n^{2}) & -lm & -ln \\ lm & -(l^{2} + n^{2}) & mn & -lm & (l^{2} + n^{2}) & -mn \\ ln & mn & -(l^{2} + m^{2}) & -ln & -mn & (l^{2} + m^{2}) \\ (m^{2} + n^{2}) & -lm & -ln & -(m^{2} + n^{2}) & lm & ln \\ -lm & (l^{2} + n^{2}) & -mn & lm & -(l^{2} + n^{2}) & mn \\ -ln & -mn & (l^{2} + m^{2}) & ln & mn & -(l^{2} + m^{2}) \end{bmatrix}$$
(12)

3-تئورى رياضياتى چندمتغيره هومير:

روش محاسباتی که در این قسمت ارائه شده است دارای الگوریتم زیر می باشد [18و19]

$$y_n = x_n - \frac{1}{2} [F'_{(x_n)}]^{-1} F_{(x_n)}$$
(13)

$$x_{n+1} = x_n - [F'_{(y_n)}]^{-1} F_{(x_n)}$$
(14)



5–1– خریای ستارہ ای

مثال زیر که با استفاده از روش های مذکور آنالیز شده است، از کتاب رامش و کریشنامورتی[20] انتخاب شده و در شکل(3) نمایش داده شده است. واحد ابعاد بر روی شکل به سانتیمتر بیان شده است و در بالاترین گره خرپا بار متمرکز برابر با 4/45 KN =P اعمال گردیده است. میزان خطا به $10^{-3} \times 10^{-3}$ محدود شده است و این سازه دارای 24عضو و 13 گره می باشد. در این خرپا برای تمامی اعضاء مدول الاستیسیته برابر E = 6895 KN/ cm² و سطح مقطع A = 6/452 cm² اختیار شده است.



سومن کنفرانس سالانه پژوهش مای معاری، شهرسازی و مدیریت شهری



The third annual conference for research in architecture, urban planning and urban management



شکل3 - خرپای ستاره ای

این خرپای سه بعدی با روشی که در بالا توضیح داده شد مورد آنالیز قرار گرفت. محاسبات توسط پردازشگر Intel(R) Core این خرپای سه بعدی با روشی که در بالا توضیح داده شد مورد آنالیز قرار گرفت. محاسبات توسط پردازشگر Intel(R) که روش انجام گرفته و زمان محاسبات پردازشگر ثبت و در جدول زیر نشان داده شده است. با توجه به نتایج مشخص می گردد که روش پیشنهاد شده در این مقاله در گامهای کمتری نسبت به روش نیوتن-رافسون به جواب دست پیدا کرده است که نتیجه آن عملکرد بهتر زمانی و سرعت بهتر می بازی عملکرد بهتر زمانی و سرعت بهتر تحلیل می باشد.

روش آنالیز	تعداد تكرارها
نيوتن-رافسون	107
چندمتغيره هومير	48

جدول1- نتایج آنالیز سازه خرپای ستاره ای

5-2-خرپای گنبدی

در این بخش خرپای شکل(4 که از کتاب تایوکیم انتخاب شده است[21]، با 147درجه آزادی 168 عضو و 73 گره با مشخصات زیر آنالیز خواهد شد. گره های تراز صفر این خرپا بسته می باشند مسیر ایستایی برای جابجایی قائم گره تاج خرپا و شمار تکرارها در جدول (2) آمده اند.

 $\epsilon = 1 \times 10^{-3}$, $A = 50/431 \text{cm}^2$, $\Delta P = 20 \text{ kN}$, $E = 2/04 \times 10^4 \text{ kN/ cm}^2$



سومین کنفرانس سالانه پژوهش مای معاری، شهرسازی و مدیریت شهری







بر پایه جدول زیر شمار تکرار های روش پیشنهادی در تمام نموهای بارگذاری ، نسبت به روش نیوتن رافسون بهبود یافته است. همانطور که از نتایج آنالیز مشخص است در این سازه هم روش ارائه شده نسبت به روش نیوتن-رافسون دارای عملکرد بهتری می باشد.

تعدادتكرارها	روش آنالیز
107	نيوتن-رافسون
52	چندمتغيره هومير

جدول2- نتایج آنالیز سازه خرپای گنبدی

6- نتيجه گيرى:

در این مقاله روش تحلیل غیرخطی خرپاها با استفاده از تئوری ریاضیاتی چندمتغیره هومیر ارائه شده است. سپس خرپاهایی بوسیله روش تحلیل استاتیکی غیرخطی نوین مورد تحلیل قرار گرفته است، که نتایج حاصل از تحلیل ها بیانگر کارایی و تناسب الگوریتم ارتقا یافته جهت حل دستگاه معادلات غیرخطی سازه ای می باشد. روش مذکور بدون اینکه روند حل را متحمل معکوس





مراجع:

سازی ماتریس سختی بیشتر در هرگام بنماید تعداد گامهای مورد نیاز برای همگرایی را با توجه به سرعت همگرایی بالاتر خود، کاهش می دهد. که این دلیلی بر کارایی روش ارائه شده می باشد.

 Kassimali, A and Bidhendi, E (1988), "Stability of trusses under dynamic loads," J. Computers & structures, 29 (3), 381–392

2. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, International Journal of Solids and Structures, 15(1979) 529-51.

3. Crisfield MA. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through, Computers and Structures, 13(1981) 55-62.

4. Bellini PX. The concept of snap-buckling illustrated by a simple model, International Journal of Non-Linear Mechanics, 7(1972) 643-50.

5. Ragon S, Gürdal Z, Watson LT. A comparison of three algorithms for tracing nonlinear equilibrium paths of structural systems, International Journal of Solids and Structures, 39(2002) 689-98.

6. Eriksson A. Structural instability analyses based on generalised path-following, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 156(1998) 45-74.

7. Papadrakakis M, Gantes C. Truncated Newton methods for nonlinear finite element analysis, Computers and Structures, 30(1988) 705-14.

8. Greco M, Gesualdo F, Venturini W, Coda H. Nonlinear positional formulation for space truss analysis, Finite Elements in Analysis and Design, 42(2006) 1079-86.

9. Thai HT, Kim SE. Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method, Journal of Constructional Steel Research, 65(2009) 1987-94.

10. Saffari H, Mansouri I. Non-linear analysis of structures using two-point method, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46(2011) 834-40.

11. Saffari H, Mirzai NM, Mansouri I. An accelerated incremental algorithm to trace the nonlinear equilibrium path of structures, Latin American Journal of Solids and Structures, 9(2012) 425-42.

12. Cadou JM, Duigou L, Damil N, Potier-Ferry M. Convergence acceleration of iterative algorithms Applications to thin shell analysis and Navier–Stokes equations, Computational Mechanics, 43(2009) 253-64.

 H. Saffari, A. Maghami1 and I. Mansouri. PRECONDITIONED IMPROVED BI-CONJUGATE GRADIENT IN NONLINEAR ANALYSIS OF SPACE TRUSSES, ASIAN JOURNAL OF CIVIL ENGINEERING (BHRC) VOL. 15, NO. 4 (2014) PAGES 547-561

14. Shewchuk JR. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, City, 1994.

15. Van Loan GGC, Golub GH. Matrix Computations, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.

16. Fu W, Ho S, Li H, Wong HCC. An effective method to reduce the computing time of nonlinear time-stepping finite-element magnetic field computation, IEEE Transactions on Magnetics, 38(2002) 441-44.

17. Yang J. Newton-conjugate-gradient methods for solitary wave computations, Journal of Computational Physics, 228(2009) 7007-24.





- H.H.H.Homeier, A modified Newton method with cubic convergence : themultivariable case, J.Comput. Appl.Math. 169(2004)161–169.
- 19. Xiaoyong Xiao,Hongwei Yin, A new class of methods with higher order of convergence for solving systems of nonlinear equations, Appl. Mathematics and Computation 264 (2015) 300–309
- 20. Ramesh, G., and Krishnamoorthy, C. S. (1994). "Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method." Int. J. Numer. Methods Eng., 37(21), 3633-3657.
- 21. Thai HT, Kim SE. Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method, Journal of Constructional Steel Research, 65(2009) 1987-94.