



روش نوین تحلیل غیرخطی خرپاهای فضایی با استفاده از تئوری ریاضیاتی

چندمتغیره هومیر

علی حسین زاده^{۱*} محمدحسین وفایی^۲

1- کارشناسی ارشد سازه، موسسه غیرانتفاعی پویش قم، hosseinzadeh85@yahoo.com

2- استادیار، موسسه غیرانتفاعی پویش قم، m.h.vafae2014@gmail.com

چکیده

عوامل موثر بر رفتار غیرخطی سازه ها شامل غیرخطی های هندسی و مصالح می باشند. تحلیل غیرخطی سازه های فضایی نهایتاً منجر به حل یک دستگاه پیچیده ی معادلات غیرخطی می گردد. در این مقاله سعی شده است تا روش حل معادلات غیرخطی بر پایه ی تئوری ریاضیاتی چندمتغیره هومیر به عنوان جایگزینی برای روش نیوتن-رافسون در تحلیل غیرخطی سازه های فولادی به کار گرفته شود. این روش حل دستگاه معادلات غیرخطی با مرتبه همگرایی 3 می باشد. مرتبه همگرایی بالای روش مذکور و کاهش معکوس سازی های ماتریس سختی که یکی از دشوارترین مراحل آنالیز محسوب می گردد موجب کاهش زمان محاسبات و تعداد گامهای مورد نیاز جهت دستیابی به پاسخ می گردد. نتایج حاصل از مطالعات عددی تایید کننده ی ارتقاء عملکرد روش تحلیل نوین غیرخطی برپایه این تئوری نسبت به روش شناخته شده نیوتن-رافسون می باشد.

کلمات کلیدی: تحلیل غیرخطی، خرپاهای فضایی، روشهای نموی، روش نیوتن-رافسون، چندمتغیره هومیر

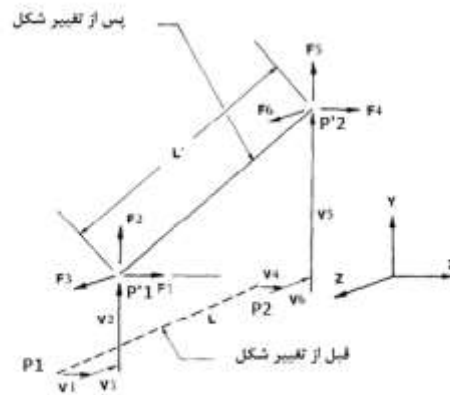
1- مقدمه:

امروزه روشهای تحلیل غیرخطی سازه ها که در آنها اثرات غیرخطی هندسی و مصالح دیده شده است مورد توجه مهندسين و محققين قرار گرفته اند. درچنين تحلیلی برخلاف تحلیل های خطی، ماتریس سختی در طول زمان بارگذاری (تکرارهای همگرایی و نموهای بار) ثابت باقی نمی ماند. با توجه به اینکه آنالیز غیرخطی نهایتاً منجر به حل دستگاه معادلات غیرخطی می گردد، جهت محاسبه ی پاسخهای تغییر مکانی سازه نیازمند یک الگوریتم توانا در زمینه ی حل دستگاه معادلات غیرخطی می باشیم. روش نیوتن-رافسون که با استفاده از گرادیان تابع و بصورت تکرار شونده اقدام به حل چنین دستگاه معادلاتی می کند، توسط کاسیمالی و همکارانش برای تحلیل غیرخطی خرپاها مورد استفاده قرار گرفت [1]. بعدها روش نیوتن رافسون اصلاح شده که در آن از مشتق تابع به ازای نقطه ی حدس اولیه در تمام گامهای الگوریتم استفاده می گردید نیز در تحلیل غیرخطی خرپا استفاده شد. نیوتن رافسون اصلاح شده گرچه تعداد گامهای بیشتری جهت همگرایی حل دستگاه معادلات غیرخطی نیاز داشت اما با توجه به حذف عمل پرهزینه و زمان بر معکوس سازی ماتریس سختی نهایتاً کارایی بیشتری نسبت به روش نیوتن رافسون در حل دستگاه معادلات غیرخطی از خود نشان می داد. سپس ریکس روش طول قوس را ارائه نمود [2] و کریسفیلد این متدها را با بروز رسانی قیود ارتقاء داد [3]. برای مطالعه ی نقاط فروجهش در خرپاها بلینی یک مدل ریاضیاتی ساده ارائه کرد [4]. راگون و همکارانش سه الگوریتم متفاوت را مطالعه کردند و نتایج ناشی از آنها را با هم مقایسه کردند [5]. اریکسون چندین روش برای عبور از نقاط حدی ارائه کرد که در آنها اثرات غیرخطی هندسی در نظر گرفته شده بود [6]. پاپادراکاکیس و گانتس چندین روش برای کوتاه کردن زمان اجرای الگوریتم نیوتن رافسون ارائه کردند [7]. گرسیکو و همکاران یک فرمول بندی غیرخطی برای آنالیز خرپاهای فضایی معرفی نمودند که در آن بجای جابجایی های گرهی از مفهوم موقعیت گرهی استفاده شده بود [8]. تای و کیم آنالیز غیرخطی خرپاها را تحت غیرخطی های هندسی و مصالح به انجام رساندند [9]. صفاری و منصورى یک روش تحلیل غیرخطی ارائه نمودند که سرعت همگرایی را بالا می برد، آنها از تئوری دو نقطه ای برای کاهش زمان همگرایی استفاده کرده بودند [10]. آنها سپس روش سه نقطه ای را در ادامه روش دو نقطه ای بسط دادند [11]. کادو و همکاران دو روش تسریع کننده همگرایی که به عنوان روشهای اصلاح شده ی تخمین چندجمله ای حداقل و تخمین نموی شناخته می شوند ارائه کردند [12]. سپس صفاری و همکاران روش گرادیان مزدوج را در حل معادلات غیرخطی جایگزین روش نیوتن-رافسون کردند و کارایی بهتری از حل دستگاه معادلات غیرخطی بدست آمد. روش گرادیان مزدوج یک روش تکراری مناسب و محبوب برای یافتن پاسخ دستگاه معادلات خطی با حذف عملیات وارون سازی ماتریس سختی است که بایستی ماتریس ضرائب در آن ماتریس مربعی متقارن و دارای دترمینان مثبت باشد. در بعضی حالات تحلیل غیرخطی ماتریس ضرائب تغییرشکلهای محاسبه شده متقارن نیست بنابراین آنها روش دیگری تحت عنوان روش گرادیانی پیش شرط دار را ارائه کردند که توانایی یافتن پاسخ دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرائب نامتقارن و دارای دترمینان منفی را داراست. در این مقاله با استفاده از تکنیک محاسباتی چندمتغیره هومیر روشی ارائه شده است که ضمن همگرایی سریعتر در رسیدن به پاسخ، از تکرار معکوس سازی ماتریس سختی نیز جلوگیری شده است. نتایج حاصل از حل مثالهای عددی بیانگر کارایی و سرعت بالای تحلیل غیرخطی خرپاها با استفاده از الگوریتم یاد شده می باشد [13-17].

2- تحلیل غیرخطی خرپاها:

در این مقاله خرپاها به عنوان یکی از دسته های پر استفاده سازه ها مورد بررسی قرار می گیرند و به جهت دریافت صحیح از روش تحلیل غیرخطی خرپا، روند انجام این تحلیل و همچنین ماتریس سختی یک المان خرپایی غیرخطی ارائه می گردد. در شکل شماره

(1) یک المان ساده ی خرابایی سه بعدی در حالت اولیه ی پیش از بارگذاری و همچنین درحالت تغییر شکل یافته ی پس از بارگذاری ارائه گردیده است [1].



شکل ۱- المان خرابایی سه بعدی قبل و بعد از تغییر شکل

نقاط ابتدا و انتهای عضو پیش از بارگذاری با $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ و $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ و پس از بارگذاری با $P'_1(X_1 + V_1, Y_1 + V_2, Z_1 + V_3)$ و $P'_2(X_2 + V_4, Y_2 + V_5, Z_2 + V_6)$ نشان داده می شود. مولفه های V_1 تا V_3 بیانگر میزان جابجایی نقطه ی شروع و مولفه های V_4 تا V_6 بیانگر میزان جابجایی در نقطه انتهای عضو در 3 راستا می باشند. لذا مختصات تغییر شکل یافته ی نقاط ابتدا و انتهای عضو بصورت P'_1 و P'_2 نشان داده می شود. در صورتی که نیروهای انتهایی در مختصات عمومی با $\{F\}$ و نیروی محوری داخلی در مختصات محلی با Q نشان داده شوند این دو بردار بوسیله بردار تبدیل $\{B\}$ با یکدیگر مرتبط خواهند بود.

$$\{F\} = \{B\}Q \quad (1)$$

$$\{B\} = \{l \ m \ n \ -l \ -m \ -n\} \quad (2)$$

در رابطه بالا منظور از l, m, n کسینوسهای هادی عضو در اثر تغییر شکل ها است. که بصورت رابطه (3) قابل محاسبه می باشند.

$$l = \frac{(X_2 - X_1) + (V_4 - V_1)}{\hat{L}} \quad (3-الف)$$

$$m = \frac{(Y_2 - Y_1) + (V_5 - V_2)}{\hat{L}} \quad (3-ب)$$

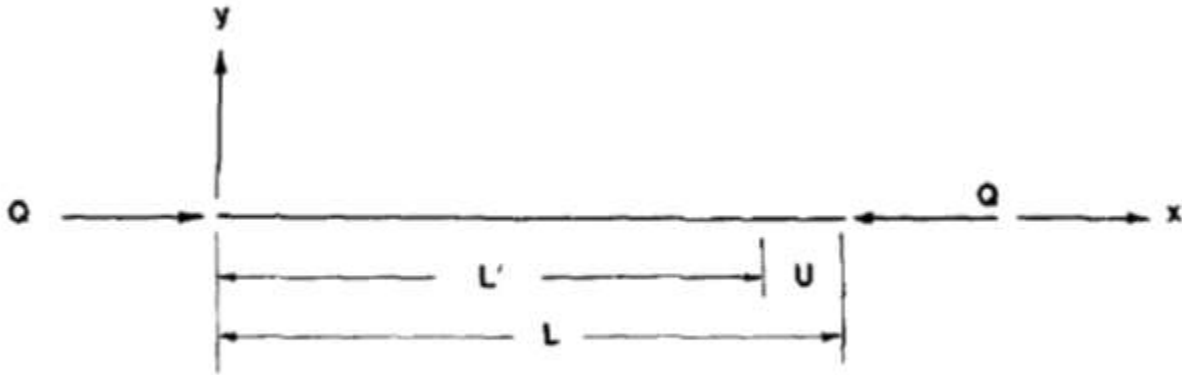
$$n = \frac{(Z_2 - Z_1) + (V_6 - V_3)}{\hat{L}} \quad (3-ج)$$

$$+ \{(Z_2 - Z_1) + (V_6 - V_3)\}^2 / 2 \hat{L} = [\{(X_2 - X_1) + (V_4 - V_1)\}^2 + \{(Y_2 - Y_1) + (V_5 - V_2)\}^2] \quad (4)$$

مطابق شکل شماره (2) در رابطه ی فوق \hat{L} طول ثانویه ی عضو پس از تغییر شکل می باشد که به شکل رابطه ی (4) قابل

محاسبه است. برای تعیین نیروی محوری در مختصات محلی از تغییر طول محوری ایجاد شده بهره می جوئیم و آنرا با U نمایش می دهیم که بصورت رابطه ی (5) قابل محاسبه است.

$$U = L - L' \quad (5)$$



شکل ۲- مختصات محلی عضو

بنابراین نیروی محوری در خرپا به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$Q = \frac{AE}{L} U \quad (6)$$

در رابطه ی فوق سطح مقطع عضو خربایی با A و مدول الاستیسیته ماده تشکیل دهنده عضو با E نمایش داده شده است.

$$\{f(x)\} = \{P\} \quad (7)$$

که در آن منظور از f برآیند نیروهای داخلی و منظور از x مختصات کلی نقاط شامل تغییر مکان ها است. و $\{P\}$ بیان گر نیروهای خارجی وارد بر نقاط است. که شکل دیفرانسیلی آن در زیر نشان داده شده است. با فرض تمرکز جرم ها در مفصل ها و صرف نظر از اثر میرایی، معادله حرکت سازه به عنوان یک واحد به شکل رابطه ی زیر ارائه می گردد:

$$[\tau]\{\Delta x\} = \{\Delta P\} \quad (8)$$

در رابطه بالا $\{\Delta P\}$ معرف نمو بار، و $\{\Delta x\}$ نشانگر نمو تغییر مکان هستند و τ ماتریس سختی مماسی سیستم است.

$$[\tau] = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (9)$$

1-2- ماتریس سختی مماسی عضو

رابطه رشد نیروهای انتهایی و تغییر مکان انتهایی عضو در مختصات سراسری را می توان به صورت

$$\{\Delta F\} = \quad (10)$$

$$[T]\{\Delta V\}$$

نوشت که در آن ماتریس سختی مماسی عضو، $[T]$ توسط رابطه



$$[T] = \left(\frac{AE}{L}\right) \{B\}\{B\}^{Tr} + Q[g] \quad (11)$$

تعریف می شود و توان Tr نشان دهنده ماتریس ترانهاده است و ماتریس [g] به صورت زیر تعریف می شود.

$$[g] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -(m^2 + n^2) & lm & ln & (m^2 + n^2) & -lm & -ln \\ lm & -(l^2 + n^2) & mn & -lm & (l^2 + n^2) & -mn \\ ln & mn & -(l^2 + m^2) & -ln & -mn & (l^2 + m^2) \\ (m^2 + n^2) & -lm & -ln & -(m^2 + n^2) & lm & ln \\ -lm & (l^2 + n^2) & -mn & lm & -(l^2 + n^2) & mn \\ -ln & -mn & (l^2 + m^2) & ln & mn & -(l^2 + m^2) \end{bmatrix} \quad (12)$$

3-تئوری ریاضیاتی چندمتغیره هومیر:

روش محاسباتی که در این قسمت ارائه شده است دارای الگوریتم زیر می باشد [18و19]

$$y_n = x_n - \frac{1}{2} [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) \quad (13)$$

$$x_{n+1} = x_n - [F'(y_n)]^{-1} F(x_n) \quad (14)$$

4- الگوریتم تحلیل غیر خطی خرپا :

- 1- فرم سازه ، متغیرها و پارامترها را تعریف کنید.
- 2- اولین نمو بار $\{\Delta P\}$ ، شرایط مرزی ، ارتباط بین المانها ، هندسه سازه ، مشخصات مصالح و حداکثر تعداد نموها را وارد کنید.
- 3- ماتریس سختی مماسی $([k])$ هر عضو را تشکیل دهید.
- 4- ماتریس سختی را با استفاده از ماتریس انتقال از دستگاه محلی به دستگاه کلی $[T]$ منتقل نمایید.
- 5- ماتریس سختی کل سازه را از برهم نهی (اسمبل کردن) ماتریس سختی $[\tau]$ اعضا تشکیل دهید.
- 6- بردار نیروی داخلی اعضا $\{F\}$ در دستگاه کلی را محاسبه کنید.
- 7- بردار نیروی نامتعادل را با استفاده از رابطه زیر بدست آورید:

$$\{\Delta Q_1^i\} = \{P^i\} - \{F^i\} \quad (15)$$

8- با استفاده از رابطه زیر $\{\Delta U_{y,k}^i\}$ را محاسبه کنید:

$$\{\Delta Q_1^i\} = 2 [\tau] \{\Delta U_{y,k}^i\} \quad (16)$$

9- به روز رسانی هندسه سازه را با استفاده از رابطه زیر بدست می آوریم:

$$= \{U_{x,k}^i\} + \{\Delta U_{y,k}^i\} \{U_{y,k}^i\} \quad (17)$$

}



10- محاسبات نیروی داخلی اعضا در دستگاه کلی و بردار نیروی نامتعادل $\{\Delta Q_2^i\}$ و همچنین مقدار $[\tau]$ جدید با استفاده از $\{U_{y,k}^i\}$ داریم:

$$\{\Delta U_{z,k}^i\} = [\tau]^{-1} * \{\Delta Q_1^i\} \quad (18)$$

11- به روز رسانی هندسه سازه را مجدداً و این بار با استفاده از رابطه بدست آورید:

$$\{U_{z,k}^i\} = \{U_{y,k}^i\} + \{\Delta U_{z,k}^i\} \quad (19)$$

12- اگر معیار همگرایی ارضا نشد گامهای 7 تا 12 تا رسیدن به همگرایی مطلوب تکرار می شود. معیار همگرایی را براساس کنترل جابجایی به صورت زیر محاسبه کنید:

$$\frac{\sum(\Delta U_{x,k+1}^i)^2}{\sum(U_{x,k+1}^i)^2} \leq \varepsilon \quad (20)$$

در این مقاله $\varepsilon = 0/001$ در نظر گرفته شده است.

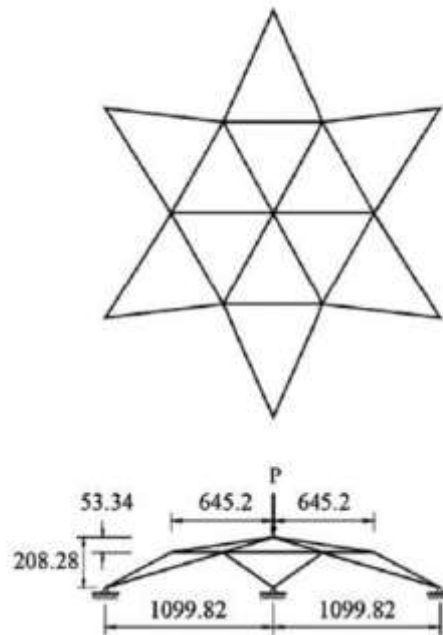
13- نمو جدید بار را اعمال کرده و به گام 1 برمی گردید. زمانی که تعداد نموها به مقدار مشخص شده در ورودی محاسبات رسید، محاسبات پایان خواهد یافت.

5- مثالهای عددی

در این قسمت برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده چند مثال سازه ای بوسیله ی روش نیوتن رافسون و روش مطرح شده آنالیز غیرخطی شده و نتایج باهم مقایسه می گردد. در این تحقیق کد آنالیز غیر خطی خرپاها در نرم افزار MATLAB نوشته شده و جهت همگرایی در آن از تلفیق روش نیوتن رافسون و روش ریاضی چندمتغیره هومیر استفاده شده است.

5-1- خرپای ستاره ای

مثال زیر که با استفاده از روش های مذکور آنالیز شده است، از کتاب رامش و کریشنمورتی [20] انتخاب شده و در شکل (3) نمایش داده شده است. واحد ابعاد بر روی شکل به سانتیمتر بیان شده است و در بالاترین گره خرپا بار متمرکز برابر با $4/45 \text{ KN}$ اعمال گردیده است. میزان خطا به $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ محدود شده است و این سازه دارای 24 عضو و 13 گره می باشد. در این خرپا برای تمامی اعضاء مدول الاستیسیته برابر $E = 6895 \text{ KN/cm}^2$ و سطح مقطع $A = 6/452 \text{ cm}^2$ اختیار شده است.



شکل 3 - خریای ستاره ای

این خریای سه بعدی با روشی که در بالا توضیح داده شد مورد آنالیز قرار گرفت. محاسبات توسط پردازشگر Intel(R) Core i5CPU انجام گرفته و زمان محاسبات پردازشگر ثبت و در جدول زیر نشان داده شده است. با توجه به نتایج مشخص می گردد که روش پیشنهاد شده در این مقاله در گامهای کمتری نسبت به روش نیوتن-رافسون به جواب دست پیدا کرده است که نتیجه آن عملکرد بهتر زمانی و سرعت بهتر تحلیل می باشد.

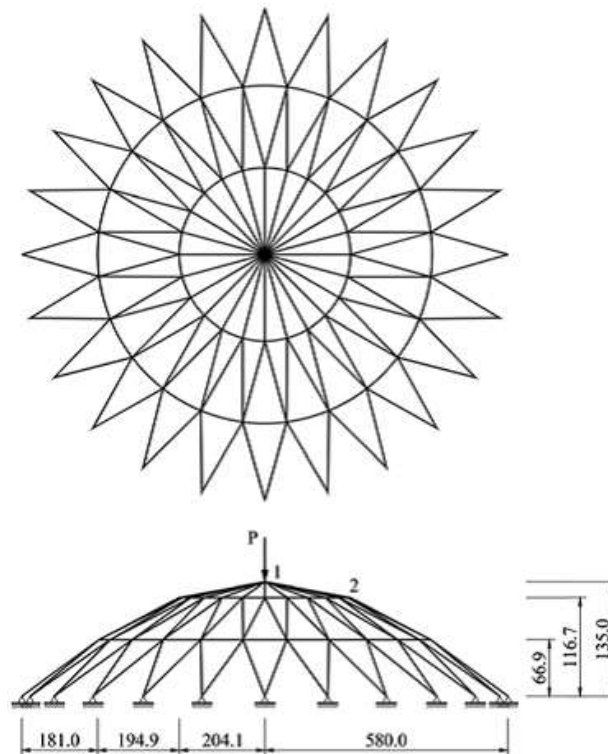
جدول 1- نتایج آنالیز سازه خریای ستاره ای

تعداد تکرارها	روش آنالیز
107	نیوتن-رافسون
48	چندمتغیره هومیر

5-2- خریای گنبدی

در این بخش خریای شکل (4) که از کتاب تای و کیم انتخاب شده است [21]، با 147 درجه آزادی 168 عضو و 73 گره با مشخصات زیر آنالیز خواهد شد. گره های تراز صفر این خرپا بسته می باشند مسیر ایستایی برای جابجایی قائم گره تاج خرپا و شمار تکرارها در جدول (2) آمده اند.

$$\varepsilon = 1 \times 10^{-3} \quad \text{و} \quad A = 50/431 \text{ cm}^2 \quad \Delta P = 20 \text{ kN} \quad \text{و} \quad E = 2/04 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$$



شکل 4- خرپای گنبدی

بر پایه جدول زیر شمار تکرار های روش پیشنهادی در تمام نمونه های بارگذاری ، نسبت به روش نیوتن رافسون بهبود یافته است. همانطور که از نتایج آنالیز مشخص است در این سازه هم روش ارائه شده نسبت به روش نیوتن-رافسون دارای عملکرد بهتری می باشد.

جدول 2- نتایج آنالیز سازه خرپای گنبدی

تعداد تکرارها	روش آنالیز
107	نیوتن-رافسون
52	چندمتغیره هومیر

6- نتیجه گیری:

در این مقاله روش تحلیل غیرخطی خرپاها با استفاده از تئوری ریاضیاتی چندمتغیره هومیر ارائه شده است. سپس خرپاهایی بوسیله روش تحلیل استاتیکی غیرخطی نوین مورد تحلیل قرار گرفته است، که نتایج حاصل از تحلیل ها بیانگر کارایی و تناسب الگوریتم ارتقا یافته جهت حل دستگاه معادلات غیرخطی سازه ای می باشد. روش مذکور بدون اینکه روند حل را متحمل معکوس



سازی ماتریس سختی بیشتر در هرگام بنماید تعداد گامهای مورد نیاز برای همگرایی را با توجه به سرعت همگرایی بالاتر خود، کاهش می دهد. که این دلیلی بر کارایی روش ارائه شده می باشد.

مراجع:

1. Kassimali, A and Bidhendi, E (1988), "Stability of trusses under dynamic loads," J. Computers & structures, 29 (3), 381-392
2. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, International Journal of Solids and Structures, 15(1979) 529-51.
3. Crisfield MA. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through, Computers and Structures, 13(1981) 55-62.
4. Bellini PX. The concept of snap-buckling illustrated by a simple model, International Journal of Non-Linear Mechanics, 7(1972) 643-50.
5. Ragon S, Gürdal Z, Watson LT. A comparison of three algorithms for tracing nonlinear equilibrium paths of structural systems, International Journal of Solids and Structures, 39(2002) 689-98.
6. Eriksson A. Structural instability analyses based on generalised path-following, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 156(1998) 45-74.
7. Papadrakakis M, Gantes C. Truncated Newton methods for nonlinear finite element analysis, Computers and Structures, 30(1988) 705-14.
8. Greco M, Gesualdo F, Venturini W, Coda H. Nonlinear positional formulation for space truss analysis, Finite Elements in Analysis and Design, 42(2006) 1079-86.
9. Thai HT, Kim SE. Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method, Journal of Constructional Steel Research, 65(2009) 1987-94.
10. Saffari H, Mansouri I. Non-linear analysis of structures using two-point method, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46(2011) 834-40.
11. Saffari H, Mirzai NM, Mansouri I. An accelerated incremental algorithm to trace the nonlinear equilibrium path of structures, Latin American Journal of Solids and Structures, 9(2012) 425-42.
12. Cadou JM, Duigou L, Damil N, Potier-Ferry M. Convergence acceleration of iterative algorithms Applications to thin shell analysis and Navier-Stokes equations, Computational Mechanics, 43(2009) 253-64.
13. H. Saffari, A. Maghami and I. Mansouri. PRECONDITIONED IMPROVED BI-CONJUGATE GRADIENT IN NONLINEAR ANALYSIS OF SPACE TRUSSES, ASIAN JOURNAL OF CIVIL ENGINEERING (BHRC) VOL. 15, NO. 4 (2014) PAGES 547-561
14. Shewchuk JR. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, City, 1994.
15. Van Loan GGC, Golub GH. Matrix Computations, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
16. Fu W, Ho S, Li H, Wong HCC. An effective method to reduce the computing time of nonlinear time-stepping finite-element magnetic field computation, IEEE Transactions on Magnetics, 38(2002) 441-44.
17. Yang J. Newton-conjugate-gradient methods for solitary wave computations, Journal of Computational Physics, 228(2009) 7007-24.



18. H.H.H.Homeier, A modified Newton method with cubic convergence : themultivariable case, J.Comput. Appl.Math. 169(2004)161–169.
19. Xiaoyong Xiao,Hongwei Yin, A new class of methods with higher order of convergence for solving systems of nonlinear equations, Appl. Mathematics and Computation 264 (2015) 300–309
20. Ramesh, G., and Krishnamoorthy, C. S. (1994).“Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method.” Int. J. Numer. Methods Eng.,37(21), 3633-3657.
- 21.Thai HT, Kim SE. Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method, Journal of Constructional Steel Research, 65(2009) 1987-94.