بررسی کاربردی قضیه جداسازی ژوردان ـ براوئربرای ابررویه های هموار

علی حبیبی مؤخر[1]، نگاریاوری[2]

[1] عضو هیئت‌علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی 3697-19396، تهران، ایران
a_habibi@pnu.ac.ir

[2] دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی 3697-19396، تهران، ایران
negaryavari13@yahoo.com

چکیده

در این مقاله برهان ساده ای از قضیه جداسازی ژوردان ـ براوئر به دست خواهیم داد.این قضیه بیان می کند که برای یک ابررویه ی هموار، همبند ، فشرده ، و جهت پذیر مانند $M \subset R^m$ متمم آن ، $R^m - M$ دومولفه همبند دارد که M مرز هر یک از انهاست.

کلمات کلیدی: ابر رویه هموار، جهت پذیری،قضیه جداسازی ژوردان-براوئر

1. مقدمه

زیر مجموعه ی $M \subset R^m$ یک ابررویه ی هموار خوانده می شـــود هرگاه به ازای هر نقطه $x \in M$ مجموعه ای باز چون U حاوی x و تابعی هموار چون $\varphi : U \to R$ با ویژگیهای زیر وجود داشته باشد:

$$\text{I)} grad\varphi(x) \neq \circ$$

$$\text{II)} \varphi^{-1}(\circ) = M \cap U$$

بردار $V \in R^M$ را قائم بر M در نقطه ی X می گوییم هرگاه مضربی از $grad\varphi(x)$ باشد. فضای مماس بر M در نقطه ی x عبارت است از مجموعه ی $T_x M$ مرکب از همه ی بردارهای R^m که بر $grad\varphi(x)$ عمود باشند. نگاشت $f : M \to R^n$ هموار نامیده می شود هر گاه برای هر $f.x \in M$ تحدید نگاشتی همواره چون $f : M \to R^n$ به $U \cap M$ باشد که در آن U مجموعه ای باز شامل x است. مشتق نگاشت هموار $f : M \to R^n$ تبدیل خطی چون $f'(x) : T_X M \to R^n$ است که از تحدید $F'(x) : R^m \to R^n$ به دســت می آید. (به یاد آورید که ماتریس F'(x) ماتریس ژاکوبی F اســت.)هر نگاشــت

هموار که وارونش نیز هموار باشد یک دیفئومورفیسم نام دارد. قضیه ی نگاشت وارون حکم می کند که اگر $f'(x): T_X M \to R^{m-1}$ یک یکریختی خطی باشد، آنگاه همسایگی V از نقطه x در M وجود دارد به طوری که تحدید f به آن، دیفئومورفیسم از V به روی زیر مجموعه ای باز از R^{m-1} است. (برای ملاحظه ی تفصیل بیشتر، مرجع [2] را ببینید)

ابر رویه ی هموار $M \subset R^m$ را جهت پذیر می خوانیم هر گاه میدان هموارى از بردارهای واحد قائم را به خود بپذیرد، یعنی نگاشت هموارى چون $v: M \to R^m$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $v(x), |v(x)| = 1, x \in M$ در نقطه ی x قائم بر M باشد.

فرض جهت پذیری در قضیه ی بالا زائد است، چرا که هر ابررویه ی فشرده لزوما جهت پذیر است.(برای دیدن برهانی کوتاه از این مطلب در حالت هموار، مرجع [1] را ببینید.)لکن آوردن این فرض دراینجا به ما امکان می دهد که برهان را ساده کنیم. در بسیاری حالات (همچون وقتی که $M=S^{m-1}$ [کره ی m-1 بعد در R^m]) جهت پذیری نوعی پیش فرض تلقی می شود.

منظور ما از «هموار» همان C^∞ است. اثبات ما کلمه به کلمه برای رویه های C^2 نیز برقرار است، و با اندک اصلاحات فنی (با بهره وری از میدانهای قاطع (transverse) به جای قائم) میتوان آن را برای رویه های C^1 نیز به کار بست.برای اثبات قضیه ی بالا می توانستیم از روش ساملسن نیز استفاده کنیم اما گمان می کنیم که رهیافت ما مقدماتیتر باشد. به جای به کار بستن قضیه ی تقاطع و رده بندی خمینه های یک بعدی، از این حکم مشهور استفاده می کنیم که هر میدان برداری هموار $X:R^m \to R^m$ و $X(x)=(a_1(x), \dots, a_m(x))$ که در شرایط انتگرالپذیری $(i, j = 1,\dots, m) \partial a_i / \partial x_j = \partial a_j / \partial x_i$ صدق می کند گرادیان تابعی هموار چون $\varphi : R^m \to R$ است.یک بار و برای همیشه میدانی هموار از بردارهای واحد قائم چون $v: M \to R^m$ را مفروض می گیریم، و نگاشت هموار $h: M \times R \to R^m$ را با $h(x,t) = x+t.v(x)$ تعریف می کنیم. به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، $h_e : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to R^m$ نمایانگر تحدید h خواهد بود.نتیجه استاندارد زیر را برای کامل بودن بحث یادآوری می کنیم.

لم: فرض کنیم $M \subset R^m$ یک ابر رویه هموار، جهت پذیر، و فشرده باشد. در این صورت به ازای ε ی مثبت، $h_e : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to R^m$ یک دیفئومورفیسم به روی زیر مجموعه ای باز از R^m است.

برهان: به ازای هر $x \in M$ مشتق $h'(x,0): T_x M \times R \to R^m$ یک یکریختی خطی است. زیرا هر بردار افقی (w,0) را به w و هر بردار قائم $(0.t)$ را به $t.v(x)$ (که بر w عمود است) می فرستد. بنابر قضیه ی نگاشت وارون ، می توانیم $\delta_x > 0$ و همسایگی باز v_x از x در M را چنان بیابیم که h مجموعه ی $V_x \times (-\delta_x, \delta_x)$ را به طور دیفئومورفیک به روی یک همسایگی باز x در R^m بنگارد.تنها چیزی که برای اثبات باقی می ماند ان است که نشان دهیم h_ε برای ε ی مثبت، یک به یک است. هر گاه چنین نباشد، به ازای $n \in N$ می توان جفتهای متمایز $(y_n, t_n), (x_n, s_n)$ را در $M \times (-1/n, 1/n)$ چنان یافت که $h(x_n, s_n) = h(y_n, t_n)$ چون $M \times [-1.1]$ فشرده است ، می توانیم (در صورت لزوم، با در نظر گرفتن زیر دنباله ها) فرض کنیم $x_n \to x \in M$ و $t_n \to 0, s_n \to 0, y_n \to y \in M$ در این صورت

$$x = h(x,0) = \lim_n h(x_n, s_n) = \lim_n h(y_n, t_n) = h(y,0) = y$$

بنابراین $Lim(x_n, s_n) = Lim(y_n.t_n) = (x,0)$ برای مقادیر به اندازه ی کافی بزرگ n $(x_n.s_n)$ و (y_n, t_n) متعلق به مجموعه ی $V_x \times (-\delta_x, \delta_x)$ خواهد بود و در چنین حالتی $h(x_n, s_n) \neq h(y_n, t_n)$ این تناقض ، لم را به اثبات می رساند.□

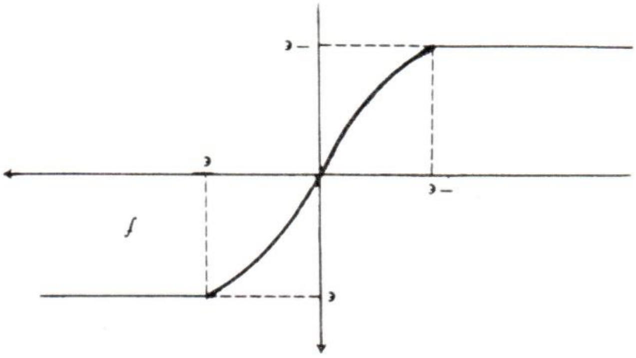
ما تصویر h_ε را به $V_\varepsilon(M)$ نشان می دهیم و آن را یک همسایگی لوله ای M می خوانیم همچنین می نویسیم $V_\varepsilon[M] = h(M \times [-\varepsilon, \varepsilon])$.

2-نتیجه اصلی:

برهان قضیه:

کار را با نشـان دادن اینکه R^m-M ناهمبند اسـت آغاز می کنیم. به طور دقیق تر، تابع همواری چون $\varphi : R^m \to R$ تعریف می کنیم به طوری که $M=\varphi^{-1}(\circ)$ ، و به ازای هر $x\in M$, $grad\varphi(x)\neq\circ$. در این صـورت مجموعه های باز $A=\{x\in R^m;\varphi(x)>\circ\}$, $B=\{x\in R^m;\varphi(x)<\circ\}$ ناتهی و از هم جدا هسـتند و داریم $R^m-M=A\bigcup B$ نحوه تعریف φ به قرار زیر است.

فرض کنیم $V_{2\varepsilon}(M)$ یک همسایگی لوله ای M باشد. تابع هموار f:R→R را چنان می گیریم که $f(\circ)=\circ$ و $f'(t)>\circ$ برای $f(t)=\varepsilon,-\varepsilon<t<\varepsilon$ برای $t\geq\varepsilon$ و $f(t)=-\varepsilon$ برای $t\leq-\varepsilon$.



هر نقطه $V_{2\varepsilon}(M)$ را می توان به طور یکتایی به شـکل $x+t.v(x)$ نوشـت که در آن $|t|<2\varepsilon, x\in M$ تابع $g:V_{2\varepsilon}(M)\to R$ را بـا $g(x+t\circ v(x))=f(T)$ تعریف می کنیم. در این صـورت g هموار اسـت، $M=g^{-1}(\circ)$, $g(x+t.v(x))=\varepsilon$ برای $t\in[\varepsilon,2\varepsilon)$ و $g(x+t.v(x))=-\varepsilon$ برای $t\in(-2\varepsilon,\varepsilon]$.

فرض کنیم X:R^m→R^m میدانی برداری باشد که بر $V_{2\varepsilon}(M)$ برابر grad g و درخارج آن صفر است. مجموعه ی $V_\varepsilon[M]$ فشـرده و بنابراین در R^m بسـته اسـت. X بر هر یک از مجموعه های باز $V_{2\varepsilon}(M)$ و $R^m-V_\varepsilon[M]$ هموار اسـت. (در واقع بردومی متحد با صفر است) .پس X یک میدان برداری همواره در R^m است ، که به وضوح شرایط انتگرالپذیری را بر می آورد. بنابراین می توانیم تابع هموار $\varphi:R^m\to R$ را چنان اختیار کنیم که $grad\varphi=X$. در صـورت لزوم ، با افزودن مقداری ثابت به φ ، می توان فرض کرد که برای هر x در $V_{2\varepsilon}(M)$ ، $\varphi(x)=g(x)$ ، زیرا $V_{2\varepsilon}(M)$ مجموعه ای باز و همبند است که φو g بر آن گرادیانهای یکسان دارند. به علاوه φ بر هر مولفه همبند $R^m-V_\varepsilon(M)$ ثابت است زیرا گرادیانش در آنجا صفر است. اکنون توجه کنیم که هر چنین مولفه ای ، $V_{2\varepsilon}(M)$ را قطع می کند. [به ازای هر $y\notin V_{2\varepsilon}(M)$ مفروض، p را نقطه ای در مجموعه بسـته ی $V_\varepsilon[M]$ بگیرید که فاصـله اش تا y کمترین باشـد. قطعه خط [y,p] در $R^m-V_\varepsilon(M)$ (و بنابراین دو مولفه y در این مجموعه) قرار می گیرد $V_{2\varepsilon}(M)$ را در همه ی نقاط نزدیک به p قطع می کند.]

در این صــورت $M=\varphi^{-1}(\circ)$ و در خارج $V_\varepsilon(M)$ داریم $\varphi=\pm\varepsilon$. هرگاه $x\in M$ ، به ازای cیی حقیقی خواهیم داشــت $grad\varphi(x)=c.v(x)$ زیرا گرادیان بر سطح تراز M عمود است. این نشان می دهد که :

$$c=\langle grad\varphi(x),v(x)\rangle=\frac{d}{dt}\left[g\left(x+t.v(x)\right)\right]_{t=\circ}=f'(\circ)>\circ$$

بنابراین در هر نقطه $grad\varphi(x)\neq\circ, x\in M$.

اکنون نشان می دهیم که مجموعه های باز A و B که در ابتدای برهان تعریف شدند همبندند. در حقیقت A شامل مجموعه ی همبند $P=h(M\times(\circ,2\varepsilon))=\{x+t.v(x), x\in M,\ \circ<t<2\varepsilon\}$ است. به علاوه هر $y\in A$ یا در P است یا می توان با قطعه خطی چون $[y,p]\subset A$ به نقطه $p\in P$ وصــلش کرد. تنها کافی اســت (مانند پیش) p را نقطه ای در مجموعه ی بسته ی $h(M\times[\circ.\varepsilon])$ بگیریم که فاصله ای تا y کمترین باشد. استدلال مشابهی همبندی B را ثابت می کند.

سرانجام ثابت می کنیم که M مرز هر یک از مولفه های همبند A و B از مجموعه ی R^m-M است.

به ازای هر $x\in M$ نقطه ی $x+t.v(x)$ برای $\circ<t<\varepsilon$ به A ، و برای $-\varepsilon<t<\circ$ به B تعلق دارد. فرض کنیم *fr.S* نمایانگر مرز مجموعه S با شد. این مطلب نشان می دهد که برای هر $x\in M$, $x\in fr.A\cap fr.B$ از سوی دیگر هر گاه $x\in fr.A$ داریم $\varphi(x)\geq\circ$ زیرا $x\in\overline{A}$. اما $\varphi(x)\leq\circ$ زیرا $x\notin A$، پس $\varphi(x)=\circ$ یعنی $fr.A\subset M$ که نتیجه می دهد *fr.A*=M به روش مشابهی خواهیم داشت *fr.B* = M و اثبات به انجام می رسد.□

3. نتیجه‌گیری

اســتدلالی از همین نوع را می توان هنگامی که ابر رویه ی M به جای فشــرده بودن تنها زیر مجموعه ای بســته از R^m فرض شود، به کار بست. بدین منظور تنها لازم است لم چنین اصلاح شود که به جای عدد ثابت $\varepsilon>\circ$ تابع پیوسته مثبتی چون $\varepsilon:M\to R$ بیابیم که ویژگی زیر را داشته باشد:

هر گاه $x\mid y$ در M باشــند آنگاه برای هر $s\in(-\varepsilon(x),\varepsilon(x))$ و هر $t\in(-\varepsilon(y),\varepsilon(y))$ داشــته باشــیم $x+s.v(x)\mid y+t.v(y)$.

می توان حتی از این هم فراتر رفت و R^m را با هر رویه ی M بعدی همبند ســاده ی N که رویه ی m-1 بعدی M را به عنوان زیر مجموعه ای بســته در برداشــته باشــد عوض کرد. در اینجا هم همان ایده به کار می رود، به جز اینکه نحوه ی ســاختن همسایگی لوله ای $V_\varepsilon(M)\subset N$ ظریفتر خواهد بود. (به جای قطعه خطهای راست میتوان ژئودزیکها را در نظر گرفت) .

مراجع:

1- H. Samelson. Orientability Of Hypersurfaces in R^n ,Proc. Am .Math. Soc. 22(1969)PP. 301-302

2- J.A.Thorpe Elementary Topics In Differential Geometry ,Springer Verlag ,New York. 1979

3-B.Doubrovine S. Novikov.A Fomenko Geometrie Contemporaine Mir. Moscow 1979

در صفحه 67 از جلد 2ی این کتاب مهم اثباتی 10 سطری از قضیه ی فوق امده است. این اثبات غلط است.

Applied review jordan-brouwer separation theorem for smooth hypersurfaces

Ali Habibi Mooakher
Department of Mathematics, Payame Noor University, P.O. Box, 19395-3697, Tehran, Iran.
mail: a_habibi@pnu.ac.ir
Negar Yavarei
Department of Mathematics, Payame Noor University, P.O. Box, 19395-3697, Tehran, Iran.
mail: negaryavari13@yahoo.com

Abstract. In this paper, we obtain a simple proof of the Jordan-Brouwer Separation Theorem. This proposition states that for $M \subset \mathbb{R}^m$ a connected, compact,orientable smooth hypersurface. Its complement $R^m - M$ has two connected components, each of which has M as its point set boundary.

Keywords: Smooth hypersurface, orientable , jordan-brouwer separation theorem