11th Conference on Recent Research in Science and Technology

یازدهمین همایش پژوهش های نوین در علوم و فناوری

پاییز ۱۳۹۶

Fall 2017

آلگوریتمی برای تعیین عدد رنگی یک گراف فازی

مجید خلیلی[۱] ، بهزاد دهواری[۲]

[۱]عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد چابهار
majidkalili@gmail.com

[۲]عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان
behzaddehvari۱۳۴۸@gmail.com

چکیده:

امروزه رنگ آمیزی گراف فازی یکی از موضوعات پرکاربرد در مسائل واقعی می باشد. در اینجا آلگورتمی برای محاسبهٔ عدد رنگی یک گراف فازی معرفی شده است. روش محاسبهٔ عدد رنگی گرافهایی فازی که به کمک عملیات گوناگون مانند اجتماع و الحاق بدست آمده اند، آورده شده است. همچنین راه حلی برای مسئله مسیریابی به کمک رنگ بندی گراف های فازی پیشنهاد شده است.

کلمات کلیدی: گراف فازی، عدد رنگی، عملیات بر گرافهای فازی، مسئلهٔ مسیریابی.

۱. مقدمه

گراف های فازی کاربردهای متنوعی در علم و تکنولوژی امروز دارند، که به طور ویژه می توان از تئوری اطلاعات، شبکه های عصبی، سیستم های هوشمند، تجزیه و تحلیل خوشهای در علم آمار، تشخیص های طبی و نظریه کنترل نام برد. مسائل کاربردی متعددی نظیر مسائل زمانبندی، بودجه، شبکه و نظیر آن، می توانند به کمک مسئله رنگ آمیزی مدل سازی شوند و بنابراین مسئله رنگ آمیزی یکی از مهمترین حوزههای مطالعاتی در تحقیقات مربوط به گرافی های فازی می باشد. رنگ آمیزی گراف های فازی نقش اساسی در حل مسائل پیچیدگی شبکهها دارند. در مقالات ارائه شده در این خصوص روشهای متعددی برای رنگ آمیزی گراف ها آمده اند. رنگ آمیزی گراف ها توسط مُنُز[۳] و همکارانش معرفی شده است (۲۰۰۵ ص ۱۲۱). این نویسندگان، عدد رنگی یک گراف فازی $G = (V, \mu, \sigma)$ را به صورت یک زیرمجموعه از مجموعه V تعریف کرده اند. اصلاح چی[۴] و اُناق[۵] مفهوم عدد رنگی فازی را تعداد افرازهای دسته های رنگی تعریف کرده اند (۲۰۰۶). کیشوره[۶] و

[۱] Majid Khalili
[۲] Behzad Dehvari
[۳] S. Munoz
[۴] C. Eslahchi
[۵] B.N. Onagh
[۶] A. Kishore

سانیتا[1] نیز عدد رنگی گراف و همچنین توسعه الگوریتم های مربوط به آن را به روش مشابه معرفی کرده‌اند(۲۰۱۴ ص ۵۴۳). سامانتا[2] و پال[3] نیز تعاریفی در این خصوص داشته اند(۲۰۱۶ ص ۳۷).

اگرچه مقالات زیادی در خصوص رنگ آمیزی گراف های فازی و کاربردهای آن وجود دارد، در خصوص ارتباط بین رنگ بندی گراف های فازی و گراف هایی (فازی) که از عملیات متعدد بر روی گراف های فازی نتیجه می شوند، وجود ندارد. در این مقاله ارتباط بین رنگ بندی گراف های فازی و گراف های فازی منتج شده ای، که به کمک عملیات متعدد بر روی گراف های فازی، نظیر اجتماع، الحاق و انواع ضرب های مختلف به وجود می‌آیند، معرفی شده است. همچنین کاربردی ارائه شده است که توضیح می دهد چگونه عدد رنگی گراف های فازی برای حل مسائل مسیریابی استفاده می شود.

۲. تعاریف اولیه

تعریف ۲-۱. یک گراف فازی، سه تایی مرتبی به صورت $G:(V,\sigma,\mu)$ می باشد که در آن،

$$V=\{u_۱,u_۲,\dots,u_n\}$$

مجموعه رئوس است، σ زیر مجموعه ای فازی از V است که به صورت زیر تعریف می شود :

$$\sigma: V\rightarrow[۰,۱],$$
$$\sigma=\{(u_۱,\sigma(u_۱)),(u_۲,\sigma(u_۲)),\dots,(u_n,\sigma(u_n))\}$$

و μ یک رابطه ی فازی بر روی σ است، به صورت

$$\mu(u,v)\le\sigma(u)\wedge\sigma(v)\ ,\forall\ u,v\epsilon V.$$

فرض بر این است که گراف G فاقد طوقه بوده، V متناهی و غیر تهی است و همچنین رابطه μ بازتابی و متقارن است، یعنی

$$\mu(u,u)=\sigma(u)\quad\forall\ u\epsilon V,$$
$$\mu(u,v)=\mu(v,u)\ ,\forall\ (u,v).$$

تعریف ۲-۲. *گراف زمینه قطعی*[4] G را به صورت

$$G^*:(\sigma^*,\mu^*),$$
$$\sigma^*=\{u\epsilon V|\sigma(u)>۰\},$$
$$\mu^*=\{(u,v)\epsilon V\times V|\mu(u,v)>۰\}.$$

نمایش می‌دهیم. به طور کلی فرض می کنیم $\sigma^*=V$.

تعریف ۲-۳. مجموعه *همترازی بالی* مجموعه فازی σ را به صورت زیر تعریف می کنیم(مردسن[5] و نایر[6] ۲۰۰۰)،

$$\lambda=\{\alpha|\mu(u,v)=\alpha,(u,v)\epsilon V\times V\}.$$

تعریف ۲-۴. بازای هر $\alpha\epsilon\lambda$ *گراف قطعی* G_α را به صورت زیر تعریف می کنیم (مردسن و نایر ۲۰۰۰)،

$$G_\alpha:(\sigma_\alpha,\mu_\alpha),$$
$$\sigma_\alpha=\{u\in V|\sigma(u)\ge\alpha\},$$
$$\mu_\alpha=\{(u,v)\in V\times V|\mu(u,v)\ge\alpha\}.$$

تعریف ۲-۵ مکمل یک گراف فازی $G:(V,\sigma,\mu)$، گرافی است به صورت $\bar{G}:(V,\bar{\sigma},\bar{\mu})$ که در آن $\bar{\sigma}(u)=\sigma(u)$ و $\bar{\mu}(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$ (سانیتا و ویجایاکومار ۲۰۰۲ ص ۱۴۶۴).

تعریف ۲-۶. یک باند از گراف قطعی ساده G^* یک زیرمجموعه از V مانند S می باشد به طوری که گراف القا شده به وسیلهٔ S کامل است.

---

[1] M.S. Sunitha
[2] S. Samanta
[3] M. Pal
[4] Underlying crisp graph
[5] J.N.Mordeson
[6] P.S.Nair

تعریف ۲-۷. اگر $G_{۱}:(V_{۱},\sigma_{۱},\mu_{۱})$ و $G_{۲}:(V_{۲},\sigma_{۲},\mu_{۲})$ گراف هایی فازی با گراف های قطعی $G_{۱}^{*}:(V_{۱},E_{۱})$ و $G_{۲}^{*}:(V_{۲},E_{۲})$ باشند، آنگاه $G_{۱}\cup G_{۲}$ گرافی فازی به صورت $(V_{۱}\cup V_{۲},\sigma,\mu)$ است به طوری که

$$\sigma(u)=\begin{cases}\sigma_{۱}(u), & u\in V_{۱}-V_{۲}\\ \sigma_{۲}(u), & u\in V_{۲}-V_{۱},\end{cases}$$

$$\mu(u,v)=\begin{cases}\mu_{۱}(u,v), & (u,v)\in E_{۱}-E_{۲}\\ \mu_{۲}(u,v), & (u,v)\in E_{۲}-E_{۱}\end{cases}$$

(مردسن و نایر ۲۰۰۰).

تعریف ۲-۸. الحاق دو گراف جدا از هم $G_{۱}$ و $G_{۲}$ گرافی است به صورت

$$G=G_{۱}+G_{۲}=(V_{۱}\cup V_{۲},\sigma,\mu)$$

به طوری که σ و μ به ترتیب زیر مجموعه های فازی از $V_{۱}\cup V_{۲}$ و $E_{۱}\cup E_{۲}\cup E'$ می باشد (مردسن و نایر ۲۰۰۰). در اینجا E' مجموعه تمام یالهایی است که راسهای $V_{۱}$ و $V_{۲}$ را به هم وصل می کنند و داریم:

$$\sigma(u)=\begin{cases}\sigma_{۱}(u), & u\in V_{۱}\\ \sigma_{۲}(u), & u\in V_{۲},\end{cases}$$

$$\mu(u,v)=\begin{cases}\mu_{۱}(u,v), & (u,v)\in E_{۱}\\ \mu_{۲}(u,v), & (u,v)\in E_{۲}\\ \sigma_{۱}(u)\wedge\sigma_{۲}(v) & (u,v)\in E'.\end{cases}$$

تعریف ۲-۹) یک یال (u,v)، $M-$ قوی گفته می شود اگر

$$\mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$$

(بوتانی[۱] و باتُن[۲] ۲۰۰۳ ص ۱۰۳) و یک گراف، $M-$ قوی گفته می شود در صورتی که

$$\mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)\,,\forall\, u,v\epsilon V.$$

۳. عدد رنگی گراف های فازی

ایدهٔ عدد رنگی گراف های فازی به بیان های متعددی مطرح شده است. در اینجا گراف های فازی با مجموعه راسهای قطعی در نظر گرفته می شوند، یعنی گراف‌های فازی که $\sigma(x)=۱$ و یال های شان با میزان عضویتشان در $[۰,۱]$ معرفی می شوند. بنابر نظریهٔ مُنز و همکارانش، گراف $G:(V,\mu)$ چنان گرافی فازی در نظر گرفته می شود که $V=\{۱,۲,۳,\dots,n\}$ و μ یک عدد فازی روی مجموعه ی تمام زیرمجموعه‌های $V\times V$ باشد. همچنین،

$$I=A\cup\{۰\}$$
$$A=\{\alpha_{۱}<\alpha_{۲}<\alpha_{۳}<\cdots\alpha_{k}\}$$

مجموعه هم ترازی (یالی) G تعریف می شود. بازای هر $\alpha\in I$ گراف G_{α} نشان دهندهٔ گراف قطعی $G_{\alpha}=(V,E_{\alpha})$ می باشد که در آن $E_{\alpha}=\{ij|۱\leq i<j\leq n,\mu(i,j)\geq\alpha\}$ و $\chi_{\alpha}=\chi(G_{\alpha})$ معرف عدد رنگی گراف قطعی G_{α} می باشد(۲۰۰۵ ص ۲۱۱). با این مفروضات مُنز و همکارانش عدد رنگی گراف فازی را با مجموعه ای فازی به صورت زیر تعریف می کنند،

$$\chi(G)=\{(i,v(i))|i\in X\}$$
$$v(i)=\max\{\alpha\in I|i\in A_{\alpha}\}$$

---

[۱] K.R. Bhutani

[۲] A. Batton

اصلاح چی و اوناق، با در نظر گرفتن $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots \gamma_k\}$ به عنوان گردایه ای از مجموعه های فازی روی مجموعه V آن را یک رنگ آمیزی k- فازی از گراف $G = (V, \sigma, \mu)$ می نامند، اگر،

الف) $\vee\Gamma = \sigma$،

ب) $\gamma_i \wedge \gamma_j = 0$،

ج) به ازای هر یال قوی (x, y) از گراف G (یعنی $\mu(x, y) > 0$) داشته باشیم

$$\min\{\gamma_i(x) \wedge \gamma_i(y)\} = 0, \qquad (1 \le i \le k)$$

کمترین عدد k که به ازای آن یک k- رنگ آمیزی فازی وجود دارد، عدد رنگی فازی گراف G نامیده و آن را به $\chi^f(G)$ نمایش داده اند(۲۰۰۶).

کیشوره و سانیتا، با ترکیب تعاریف فوق از عدد رنگی، تعریف جدیدی (تعریف ۳-۱) را معرفی کرده اند و ثابت کرده اند عدد رنگی معرفی شده با $\chi^f(G)$ برابر است (۲۰۱۴ ص ۵۴۳). این تعریف، ملاک آلگوریتم معرفی شده در اینجا می باشد.

تعریف۳-۱. اگر G یک گراف فازی با گراف زمینهٔ $G_\alpha = (V, E_\alpha)$ باشد در این صورت عدد رنگی گراف G برابر خواهد بود با $\chi(G) = max\{\chi(G_\alpha) | \alpha \in I\}$.

توجه۳-۲. اگر $\alpha_i \le \alpha_j$ آنگاه $\chi\left(G(\alpha_i)\right) \ge \chi\left(G(\alpha_j)\right)$ (۲۰۱۴ ص ۵۴۳).

۴.معرفی آلگوریتم استخراج عدد رنگی گراف های فازی

با توجه به تعاریف بخش ۳ می توان آلگوریتم استخراج عدد رنگی یک گراف فازی را به شرح زیر بیان نمود:

الف) مجموعه همترازی یالی گراف فازی $G: (V, \sigma, \mu)$ یعنی $I = \{\alpha | \mu(u, v) = \alpha, (u, v) \epsilon V \times V\}$ را بدست می آوریم و آن را به صورت $I = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots \alpha_k\}$ در نظر می گیریم.

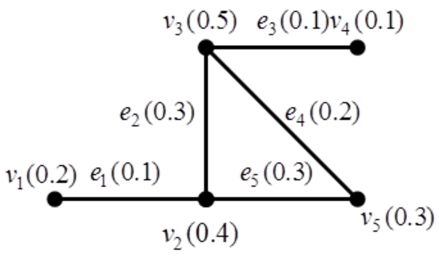
ب) بازای کمترین مقدار α_i که همان α_1 می باشد، گراف قطعی $G_{\alpha_1} = (V, E_{\alpha_1})$ را می سازیم.

ج) عدد رنگی گراف قطعی G_{α_1} یعنی χ_{α_1} را محاسبه می کنیم.

د) عدد رنگی گراف قطعی G_{α_1}، عدد رنگی گراف فازی G خواهد بود.

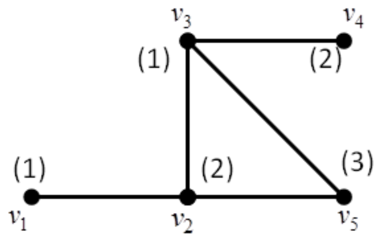
توجه کنیم که بنا بر ۳-۲ فقط کافی است به ازای کمترین مقدار α_i عدد رنگی گراف زمینه محاسبه گردد و این مقدار شرط ماکزیمم بودن در تعریف ۳-۱ را فراهم می آورد.

مثال۴-۱. فرض کنیم $G: (V, \sigma, \mu)$ گرافی فازی مطابق (شکل۱) باشد،



(شکل ۱)

در این صورت $I = \{0.1, 0.2, 0.3\}$ و $G_{0.1}$ گرافی به صورت (شکل ۲) خواهد بود،



(شکل ۲)

و در نتیجه $\chi(G) = \chi(G_{0.1}) = ۳$.

قضیه۴-۲. برای یک گراف فازی G به جز گراف های M- قوی $\chi(\bar{G}) > \chi(G)$ و اگر گراف G خود مکمل باشد، $\chi(\bar{G}) = \chi(G)$ (کیشوره و سانیتا ۲۰۱۴ ص ۵۴۳).

قضیه۴-۳. برای یک گراف فازی G با n راس، $\chi(\bar{G}) + \chi(G) \geq n$ (کیشوره و سانیتا ۲۰۱۴ ص ۵۴۳).

با استفاده از قضایای (۳-۳) و (۳-۴) و تعاریفی که در خصوص اجتماع و الحاق گراف های فازی آورده شد به راحتی می توان نتیجه گرفت،

$$\chi(G_1 \cup G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} \;\;,\;\; \chi(G_1 + G_2) \leq n \;\; (n = |V_1| + |V_2|).$$

۵. کاربرد عدد رنگی گراف فازی

یک مسالهٔ مسیر یابی می تواند مطابق (شکل ۱) که در آن مکانها به عنوان رئوس $v_1, v_2, \dots, v_5$ از یک گراف فازی فرض می شوند، در نظر گرفته شود. یالهای گراف قابل دسترس بودن مکانها را نشان می دهند و قدرت هر یال سختی مسیر در هر سفر به مکانها را نمایش می دهد. بسته به آنکه برای یک توریست هر یک از مکانها تا چه اندازه اهمیت داشته باشد، برای مکانها ارزش فازی در نظر گرفته شده است. در اینجا عدد رنگی بدست آمده نشان دهنده حداکثر تعداد مکانهایی است که توسط این توریست از یک مکان به طور مستقیم قابل دسترسی می باشد.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله با نگاهی به تعاریف ارایه شده در خصوص عدد رنگی گراف، از آخرین تعریف ترکیبی استفاده شد و به کمک آن آلگورتیمی برای محاسبهٔ عدد رنگی یک گراف فازی معرفی شد. همچنین روش محاسبهٔ عدد رنگی گرافهایی که در نتیجه عملیاتی چون اجتماع و الحاق بدست می آیند، ارایه گردید. راه حلّی برای یک مسئله مسیر یابی، به عنوان کاربردی از عدد رنگی گرافهای فازی بیان شد. با شبیه سازی هر مسئله مسیر یابی بر اساس میزان دسترسی مکانها و اهمیت هر مکان دسترسی، می توان به کمک عدد رنگی، بهترین مسیریابی بین مکانهای مختلف را بدست آورد.

مراجع

Bhutani, K. R., & Batton, A. (۲۰۰۳). On M-strong fuzzy graphs. Information Sciences ۱۵۵, ۱۰۳–۱۰۹.

Eslahchi, C., & Onagh, B. N. (۲۰۰٦). Vertex-strength of fuzzy graphs. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID: ٤٣٦١٤.

Kishore, A., & Sunitha, M. S. (٢٠١٤). Chromatic number of resultant of fuzzy graphs. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, ٥٤٣-٥٥١.

Mordeson, J. N., & Nair, P. S. (٢٠٠٠). Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs. Springer Verlag Publication.

Munoz, S., Teresa, M., Ortuno, T., Ramirez, J., & Yanez, J. (٢٠٠٥). Coloring fuzzy graphs. OMEGA, ٣٣ (٣) ٢١١ -٢٢١.

Sunitha, M. S., & Vijaya Kumar A. (٢٠٠٢). Complement of a fuzzy graph. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, ١٤٥١-١٤٦٤.

Pramanik, T., Samanta, S., & Pal, M. (٢٠١٦). Fuzzy Coloring of Fuzzy Graphs. Afrika Matematica, ٢٧(١) ٣٧-٥٠.

An Algorithm for Determining the Chromatic Number of a Fuzzy Graph

Majid Khalili
Department of Mathematics, Faculty of Science, Islamic Azad University of Chabahar, Chabahar, Iran, E-mail: majidkhalili@gmail.com

Behzad Dehvari
Department of Computer, Faculty of Engineering, Islamic Azad University of Zahedan, Zahedan, Iran, E-mail: behzaddehvari۱۳۴۸@gmail.com

Abstract. Nowadays, fuzzy graph coloring is one of the most widely used topics in real problems. Here is an algorithm for the calculation of the chromatic number of a fuzzy graph. The method of calculating the color number of the fuzzy graphs, obtained through various operations such as union and join, is presented. A solution to the routing problem is also suggested by using fuzzy graph coloring.

Keywords: Fuzzy graph, Chromatic number, Operations of fuzzy graphs, Routing problem