Archive of SID

نقاط کارای ضعیف در یک مسئله بهینه سازی چند هدفه خطی

جواد صادقی[۱]، حسین محبی[۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، sadeghijavad13@yahoo.com

[۲] دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، hmohebi@uk.ac.ir

چکیده

در این مقاله، هدف اصلی پیدا کردن نقاط کارای ضعیف در یک مسئله بهینه سازی چند هدفه خطی در فضای R^n است. در صورتی که مسئله بهینه سازی چند هدفه دارای دو تابع هدف باشد با توجه به خطی بودن توابع هدف به راحتی می‌توان نقاط کارای ضعیف این مسئله را به دست آورد. با استفاده از نقاط کارای به دست آمده از دو تابع از توابع هدف مسئله، نقاط کارای ضعیف برای مسئله اصلی را پیدا می‌کنیم. در پایان، روش ارائه شده برای پیدا کردن نقاط کارای ضعیف را با استفاده از زبان برنامه نویسی متلب می‌نویسیم و برای چند مثال ناحیه‌ی نقاط کارا را در شکل‌های مربوطه نشان می‌دهیم.

واژه های کلیدی : بهینه سازی چند هدفه، نقاط کارای ضعیف، بهینه سازی چند هدفه خطی، مسئله برنامه ریزی خطی.

۱- مقدمه

فرض کنید $p \geq 2$ یک عدد صحیح باشد. مسئله بهینه سازی چند هدفه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{c} \min f_1(x) \\ \min f_2(x) \\ \vdots \\ \min f_p(x) \\ x \in X \end{array} \qquad (MOP)$$

که در آن برای هر $i = 1,2,\dots,p$، توابع $f_i: R^n \to R$ خطی هستند و $X \subseteq R^n$ مجموعه‌ای محدب است. در این مقاله قصد داریم روشی برای به‌دست آوردن نقاط کارای ضعیف[۱] مسئله (MOP) ارائه دهیم. مسئله بهینه سازی خطی چند هدفه در سال ۱۹۷۷ توسط بتران[۲][۵،۶] برای متغیرهای صفر و یک مورد برسی قرار گرفت. سپس در سال ۱۹۷۸ توسط ویلارل[۳] و کرون[۴][۱۹-۲۱] برای مسئله بهینه سازی خطی چند هدفه به‌صورت تقریبی از این مسئله در برنامه ریزی پویا[۵] مورد تحقیق و برسی قرار گرفت. روش‌های دیگری برای برای مسئله بهینه سازی خطی چند هدفه با دو تابع هدف توسط بانکر[۶] و همکاران [۱۵]، زئونتس[۷] [۱۷] و پسترناک[۸] و پَسی[۹] [۱۳] مورد توجه و برسی قرار گرفت. در ادامه بسیاری از محققین به تحقیق و مطالعه در این ضمینه پرداختند[۷،۱۲،۱۴،۱۸،۲۲]. موضوعات بسیاری مرتبط با این موضوع توسط بسیاری از محققین مورد برسی قرار گرفت[۱-۴،۸-۱۱،۱۶]. در اینجا ابتدا انچه در ادامه متن مورد نیاز است را ذکر می‌کنیم.

۲- حل مسئله

قضیه: مسئله بهینه سازی چند هدفه (MOP) را در نظر بگیرید. فرض کنید X_{WE} مجموعه نقاط کارای ضعیف این مجموعه باشد. فرض کنید $X_{WE}(i,j)$ مجموعه نقاط کارای ضعیف مسئله بهینه سازی چند هدفه زیر باشد.

$$\begin{array}{c} \min f_i(x) \\ \min f_j(x) \\ x \in X \end{array} \qquad (MOP(i,j))$$

---

[۱] Weakly efficient point
[۲] Bitran
[۳] Villarreal
[۴] Karwan
[۵] Dynamic
[۶] Banker
[۷] Zionts
[۸] Pasternak
[۹] Passy

www.SID.ir

Archive of SID

که در آن توابع f_i، f_j و مجموعه X در مسئله (MOP) می‌باشند. آنگاه $X_{WE} = \bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p\\ i\neq j}} X_{WE}(i,j)$.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم $\bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p\\ i\neq j}} X_{WE}(i,j) \subseteq X_{WE}$، برای این منظور $i,j \in \{1,2,\dots,p\}$ را به طور دلخواه طوری در نظر بگیرید که $i \neq j$. فرض کنید $x \in X_{WE}(i,j)$. با توجه به تعریف نقاط کارا داریم

$$\nexists\, y \in X \ni f_i(y) < f_i(x)\,, f_j(y) < f_j(x)$$

بنابراین

$$\nexists\, y \in X \ni \forall\, t = 1,2,\dots,p, \qquad f_t(y) < f_t(x)$$

زیرا اگر $\exists\, y \in X \ni \forall\, t = 1,2,\dots,p,\ f_t(y) < f_t(x)$ آنگاه برای همین y داریم $f_i(y) < f_i(x)$ و $f_j(y) < f_j(x)$. در نتیجه x نمی‌تواند عضو مجموعه $X_{WE}(i,j)$ باشد. با توجه به آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم $\nexists\, y \in X \ni \forall\, t = 1,2,\dots,p,\ f_t(y) < f_t(x)$. حال با توجه به تعریف مجموعه X_{WE} داریم $x \in X_{WE}$. پس $X_{WE}(i,j) \subseteq X_{WE}$ و چون i و j به دلخواه انتخاب شده بودند، این شمولیت نتیجه می‌دهد که

$$\bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p\\ i\neq j}} X_{WE}(i,j) \subseteq X_{WE} \qquad (۱)$$

در صورتی که وجود داشته باشد $i,j \in \{1,2,\dots,p\}$ به طوری که $X_{WE}(i,j) = X$ آنگاه داریم $\bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p\\ i\neq j}} X_{WE}(i,j) = X$. چون $\bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p\\ i\neq j}} X_{WE}(i,j) \subseteq X_{WE}$ و $X_{WE} \subseteq X$ پس نتیجه می‌گیریم $X_{WE} = \bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p\\ i\neq j}} X_{WE}(i,j)$. در ادامه اثبات فرض می‌کنیم برای هر $i,j \in \{1,2,\dots,p\}$ داریم $X_{WE}(i,j) \neq X$.

حال با این فرض موجود نشان می‌دهیم $X_{WE} \subseteq \bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p\\ i\neq j}} X_{WE}(i,j)$. برای این منظور فرض کنید $x \in X_{WE}$ نشان می‌دهیم که $x \in \bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p\\ i\neq j}} X_{WE}(i,j)$. یعنی وجود دارد $i,j \in \{1,2,\dots,p\}$ به طوری که $i \neq j$ و $x \in X_{WE}(i,j)$. با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم برای تمام $i,j \in \{1,2,\dots,p\}$ به طوری که $i \neq j$ داریم $x \notin X_{WE}(i,j)$. اعداد $i,j,k \in \{1,2,\dots,p\}$ را به طور دلخواه در نظر بگیرید. داریم $x \notin X_{WE}(i,j)$، $x \notin X_{WE}(i,k)$ و $x \notin X_{WE}(j,k)$. با توجه به تعریف نقاط کارای ضعیف داریم

$$\exists\, y_{ij} \in X \ni\ f_i(y_{ij}) < f_i(x)\,, f_j(y_{ij}) < f_j(x) \qquad (۲)$$

$$\exists\, y_{ik} \in X \ni\ f_j(y_{ik}) < f_j(x)\,, f_k(y_{ik}) < f_k(x) \qquad (۳)$$

$$\exists\, y_{jk} \in X \ni\ f_j(y_{jk}) < f_j(x)\,, f_k(y_{jk}) < f_k(x) \qquad (۴)$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم که $\exists\, y \in X \ni f_i(y) < f_i(x),\ f_j(y) < f_j(x),\ f_k(y) < f_k(x)$. چند حالت ممکن را در نظر می‌گیریم.

۱. اگر $f_i(y_{ik}) \leq f_i(y_{ij})$ آنگاه با استفاده از عبارت (۲) داریم $f_i(y_{ik}) \leq f_i(y_{ij}) < f_i(x)$ و در عبارت (۳) داریم $f_j(y_{ik}) < f_j(x)$ و $f_k(y_{ik}) < f_k(x)$ قرار می‌دهیم $y = y_{ik}$ آنگاه $f_i(y) < f_i(x)$، $f_j(y) < f_j(x)$ و $f_k(y) < f_k(x)$.

۲. اگر $f_k(y_{ij}) \leq f_k(y_{ik})$ آنگاه با استفاده از عبارت (۳) داریم $f_k(y_{ij}) \leq f_k(y_{ik}) < f_k(x)$ و در عبارت (۲) داریم $f_i(y_{ij}) < f_i(x)$ و $f_j(y_{ij}) < f_j(x)$. اگر قرار دهیم $y = y_{ij}$ آنگاه $f_i(y) < f_i(x)$، $f_j(y) < f_j(x)$ و $f_k(y) < f_k(x)$.

۳. اگر $f_i(y_{ik}) < f_i(x)$ آنگاه قرار می‌دهیم $y = y_{ik}$ با توجه به عبارت (۲) و $f_i(y_{ik}) < f_i(x)$ داریم $f_i(y) < f_i(x)$، $f_j(y) <$ $f_j(x)$ و $f_k(y) < f_k(x)$.

۴. اگر $f_k(y_{ij}) < f_k(x)$ آنگاه قرار می‌دهیم $y = y_{ij}$ با توجه به عبارت (۳) و $f_k(y_{ij}) < f_k(x)$ داریم $f_i(y) < f_i(x)$، $f_j(y) <$ $f_j(x)$ و $f_k(y) < f_k(x)$.

۵. اگر هیچ کدام از حالت‌های ۱تا ۴ برقرار نباشند یعنی اگر $f_i(y_{ik}) > f_i(y_{ij})$، $f_k(y_{ij}) > f_k(y_{ik})$، $f_i(y_{ik}) \geq f_i(x)$ و $f_k(y_{ij}) \geq f_k(x)$. در اینصورت با توجه به عبارات (۱) و (۲) داریم

$$f_i(y_{ij}) < f_i(x) \leq f_i(y_{ik}) \qquad (۵)$$

و

$$f_k(y_{ik}) < f_k(x) \leq f_k(y_{ij}) \qquad (۶)$$

با توجه به عبارت‌های (۵) و (۶) و این‌که توابع f_i و f_k خطی هستند نتیجه می‌گیریم برای هر $x' \in X$

$$\nexists\, y \in X \ni f_i(y) < f_i(x')\,, f_k(y) < f_k(x')$$

www.SID.ir

Archive of SID

با توجه به تعریف مجموعه نقاط کارا داریم $x' \notin X_{WE}(i,j)$ چون این رابطه برای هر $x' \in X$ بر قرار است، پس $X_{WE}(i,j) = X$ که این با فرض این‌که برای هر $i,j \in \{1,2,\dots,p\}$ داریم $X_{WE}(i,j) \neq X$ در تناقض است پس حالت ۵ هیچ‌گاه اتفاق نمی‌افتد.

از حالت‌های ۱ تا ۵ نتیجه می‌شود که $\exists\, y \in X \ni f_i(y) < f_i(x),\ f_j(y) < f_j(x),\ f_k(y) < f_k(x)$.

توجه داریم که اعداد $i,j,k \in 1,2,\dots,p$ را به طور دلخواه در نظر گرفته شده اند و این رابطه برای هر i,j,k دلخواه بر قرار است. یعنی

$$\forall\, i,j,k \in \{1,2,\dots,p\}, \exists\, y \in X \ni f_i(y) < f_i(x), f_j(y) < f_j(x), f_k(y) < f_k(x) \quad (۷)$$

با توجه به فرض اولیه که برای تمام $i,j \in \{1,2,\dots,p\}$ به طوری که $i \neq j$ داریم $x \notin X_{WE}(i,j)$، اگر اعداد $i,j,k,l \in \{1,2,\dots,p\}$ را در نظر بگیریم از رابطه (۷) نتیجه می‌شود که

$$\exists\, y_{ijk} \in X \ni f_i(y_{ijk}) < f_i(x), f_j(y_{ijk}) < f_j(x), f_k(y_{ijk}) < f_k(x) \quad (۸)$$

و

$$\exists\, y_{ijl} \in X \ni f_i(y_{ijl}) < f_i(x), f_j(y_{ijl}) < f_j(x), f_l(y_{ijl}) < f_l(x) \quad (۹)$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم $\exists\, y \in X \ni f_i(y) < f_i(x), f_j(y) < f_j(x), f_k(y) < f_k(x), f_l(y) < f_l(x)$. برای این منظور سه حالت ممکن را در نظر می‌گیریم.

۱. اگر $f_l(y_{ijk}) \leq f_l(y_{ijl})$ یا $f_l(y_{ijk}) < f_l(x)$ آنگاه اگر قرار دهیم $y = y_{ijk}$ با توجه به رابطه (۸) و (۹) داریم $f_i(y) < f_i(x)$، $f_j(y) < f_j(x)$، $f_k(y) < f_k(x)$ و $f_l(y) < f_l(x)$.

۲. اگر $f_k(y_{ijl}) \leq f_k(y_{ijk})$ یا $f_k(y_{ijl}) < f_k(x)$ آنگاه اگر قرار دهیم $y = y_{ijl}$ با توجه به رابطه (۸) و (۹) داریم $f_i(y) < f_i(x)$، $f_j(y) < f_j(x)$، $f_k(y) < f_k(x)$ و $f_l(y) < f_l(x)$.

۳. اگر هیچ کدام از حالت‌های ۱ و ۲ برقرار نباشند، یعنی $f_l(y_{ijk}) > f_l(y_{ijl})$، $f_l(y_{ijk}) \geq f_l(x)$، $f_k(y_{ijl}) > f_k(y_{ijk})$ و $f_k(y_{ijl}) \geq f_k(x)$ آنگاه با استفاده از رابطه‌های (۷) و (۸) داریم

$$f_l(y_{ijl}) < f_l(x) \leq f_l(y_{ijk}) \quad (۱۰)$$

$$f_k(y_{ijk}) < f_k(x) \leq f_k(y_{ijl}) \quad (۱۱)$$

با توجه به عبارت‌های (۱۰) و (۱۱) و این‌که توابع f_l و f_k خطی هستند نتیجه می‌گیریم برای هر $x' \in X$

$$\nexists\, y \in X \ni f_l(y) < f_l(x'), f_k(y) < f_k(x')$$

با توجه به تعریف مجموعه نقاط کارا داریم $x' \notin X_{WE}(l,k)$ چون این رابطه برای هر $x' \in X$ بر قرار است، پس $X_{WE}(l,k) = X$ که این با فرض این‌که برای هر $i,j \in 1,2,\dots,p$ داریم $X_{WE}(i,j) \neq X$ در تناقض است پس حالت ۳ هیچ‌گاه اتفاق نمی‌افتد. با توجه به این که اعداد $i,j,k \in \{1,2,\dots,p\}$ را به طور دلخواه در نظر گرفته شده اند از حالت‌های ۱ تا ۳ نتیجه می‌شود که

$$\forall\, i,j,k,l \in \{1,2,\dots,p\}, \exists\, y \in X \ni f_i(y) < f_i(x), f_j(y) < f_j(x), f_k(y) < f_k(x), f_l(y) < f_l(x) \quad (۱۲)$$

با توجه به متناهی بودن p، با ادامه این روند داریم

$$\forall\, t = 1,2,\dots,p, \exists\, y \in X \ni f_t(y) < f_t(x) \quad (۱۳)$$

و این با توجه به تعریف مجموعه X_{WE}، رابطه (۱۳) یعنی $x \notin X_{WE}$. از آنجا که در ابتدا فرض کردیم که برای تمام $i,j \in \{1,2,\dots,p\}$ به طوری که $i \neq j$ داریم $x \in \bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p \\ i\neq j}} X_{WE}(i,j)$ یا به عبارت دیگر فرض کردیم $x \notin \bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p \\ i\neq j}} X_{WE}(i,j)$ در نتیجه $x \notin \bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p \\ i\neq j}} X_{WE}(i,j) \Rightarrow x \notin X_{WE}$ به طور معادل داریم $x \in X_{WE} \Rightarrow x \in \bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p \\ i\neq j}} X_{WE}(i,j)$ یعنی

$$X_{WE} \subseteq \bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p \\ i\neq j}} X_{WE}(i,j) \quad (۱۴)$$

از رابطه (۱) و (۱۴) نتیجه می‌گیریم که $X_{WE} = \bigcup_{\substack{i,j=1,2,\dots,p \\ i\neq j}} X_{WE}(i,j)$. □

برای به دست آوردن مجموعه X_{WE}، با استفاده از قضیه بالا کافیست که اجتماع تمام مجموعه های $X_{WE}(i,j)$ را برای $i,j \in \{1,2,\dots,p\}$ به طوری که $i \neq j$ که تعداد آن‌ها متناهی است را به دست آوریم. توجه داریم که $X_{WE}(i,j)$ جواب کارای ضعیف مسئله $(MOP(i,j))$ است.

این مسئله را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد.

$$\begin{aligned} &\min a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \\ &\min b_{j,1}x_1 + b_{j,2}x_2 + \cdots + b_{j,n}x_n \\ &x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \end{aligned} \qquad (MOP(i,j))$$

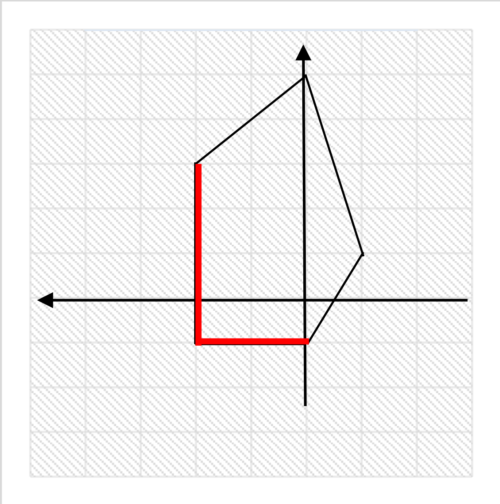
www.SID.ir

Archive of SID

که در آن برای هر $t = 1,2, \dots, n$، $a_{i,t}$ و $b_{j,t}$ اعدادی حقیقی هستند و $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. با توجه خطی بودن توابع و متناهی بودن p و n، در صورتی که X یک مجموعه چند وجهی باشد، مجموعه‌ی $X_{WE}(i,j)$ به راحتی مشخص می‌شود. در ادامه متن نحوه‌ی به بدست آمدن مجموعه‌ی X_{WE} را که به صورت اجتماع متناهی از مجموعه‌های $X_{WE}(i,j)$ است را که با استفاده از زبان برنامه نویسی متلب نوشته‌ایم را برای چند مثال نشان می‌دهیم. مثال‌ها و شکل‌های مربوط به مجموعه‌ی جواب کارای ضعیف آنها در زیر نشان داده شده است. توجه داریم که هر تابع افین انتقال از یک تابع خطی است. با توجه به آنچه در بالا گفته شد روش پیشنهادی را به راحتی می‌توان برای توابع آفین نیز بکار برد.

مثال ۱

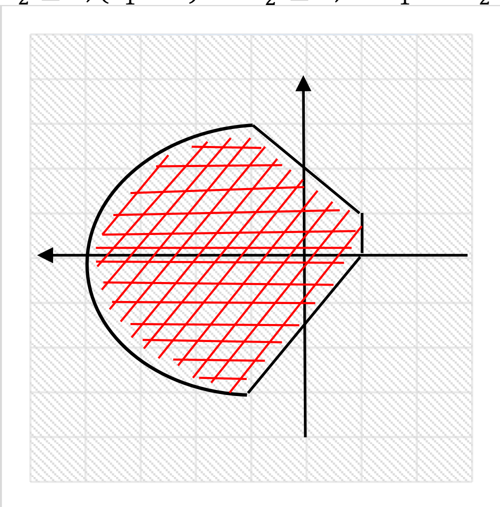
$$\min\ 2x_1 + 3x_2 + 4$$
$$min\ 6x_1 + 7x_2 - 2$$
$$min\ x_1 + 2x_2$$
$$x \in X \coloneqq \{x: -2 \le x_1, -1 \le x_2, -2x_1 + x_2 \ge -1, -x_1 + x_2 \le 5, 4x_1 + x_2 \le 5\}.$$



شکل ۱: مجموعه نقاط کارای ضعیف مربوط به مثال ۱. نقاط کارای ضعیف با نقاط پر رنگ در شکل مشخص شده‌اند.

مثال ۲

$$min\ 2x_1 + x_2 - 4$$
$$\min\ x_1 - 3x_2 + 7$$
$$\min\ x_1 + 5x_2$$
$$\min\ 3x_1 - 18x_2 - 1$$
$$x \in X \coloneqq \{x: x_1 \le 1, x_2 \le 3, (x_1+1)^2 + x_2^2 \le 9, -3x_1 + 2x_2 \ge -3, x_1 + x_2 \le 2\}.$$

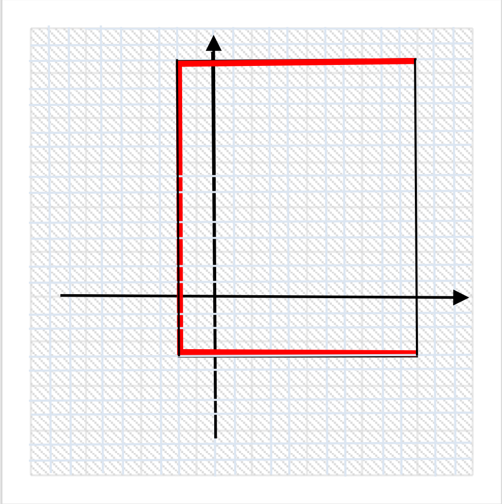


شکل ۱: مجموعه نقاط کارای ضعیف مربوط به مثال ۲. نقاط کارای ضعیف به‌صورت هاشور در شکل مشخص شده‌اند.

مثال ۳

www.SID.ir

$$\min\ 20x_1 - 60$$
$$\min\ 14x_1 + 16$$
$$x \in X \coloneqq \{x:\ -4 \le x_1 \le 16, -2 \le x_2 \le 11\}.$$



شکل ۱: مجموعه نقاط کارای ضعیف مربوط به مثال ۳. مجموعه نقاط کارای ضعیف با نقاط پر رنگ در شکل مشخص شده است.

مثال ۴

$$\min\ 5x_1 + 11x_2 - 13$$
$$\min\ -2x_1 + 45x_2 - 71$$
$$\min\ -7x_1 - 6x_2 - 9$$
$$\min\ 18x_1 - x_2 + 7$$
$$x \in X \coloneqq \{x: x_1^2 + x_2^2 \le 16, x_1 + x_2 \le 3, x_2 \le 3.5\}.$$

مجموعه نقاط کارای ضعیف مثال ۴ تهی می‌باشد.

۳- نتیجه گیری

با توجه به این که مسئله بهینه سازی چند هدفه در بسیاری از علوم مانند مدیریت، اقتصاد، حمل و نقل، و بسیاری از علوم مهندسی کاربرد دارد لذا این مسئله از اهمیت بسیاری برخوردار است. در بسیاری از موارد بعد از این‌که مسائل واقعی موجود مدل سازی می‌شوند به مسئله بهینه سازی چند هدفه برخورد می‌کنیم و همچنین در بسیاری از مسائل بهینه سازی چند هدفه که توابع هدف خطی نیستند با توجه مسئله موجود می‌توان توابع هدف را به صورت یک تابع خطی تقریب زد و سپس مسئله بهینه سازی چند هدفه خطی را حل نمود. با توجه ساده بودن روش پیشنهادی در این مقاله و کارایی این روش در مثال‌های ۱ تا ۴ نتیجه می‌گیریم که این روش می‌تواند مفید واقع شود.

۴- مراجع

[1] Benson, Harold P., "Journal of Global Optimization" **An outcome space algorithm for optimization over the weakly efficient set of a multiple objective nonlinear programming problem**, Vol. 52, No. 3, pp. 553-574, 2011.
[2] Chakraborty, M., Ray, Ananya, "OPSEARCH" **Parametric approach and genetic algorithm for multi objective linear programming with imprecise parameters**, Vol. 47, No. 1, pp. 73-92, 2010.
[3] Chinneck, J. W., Ramadan, K., " Journal- operational research society" **Linear programming with interval coefficients**, Vol. 51, pp. 209-220, 2000.
[4] Flores-Bazán, Fabián, "Mathematical Programming" **Ideal, weakly efficient solutions for vector optimization problems**, Vol. 93, No. 3, pp. 453-475, 2002.
[5] G.R. Bitran, "Math. Programming " **Linear multiple objective programs with zero-one variables**, Vol. 13, pp. 121-139, 1977.
[6] G.R, Bitran, "Math. Programming" **Theory and algorithms for linear multiple objective programs with zero-one variables**, Vol. 17, pp. 362-390, 1979.
[7] Junior, H. V. , Lins, M. P., " Journal- operational research society" **A WIN-WIN approach to multiple objective linear programming problems**, Vol. 60, No. 5, pp. 728-733, 2009.
[8] Lachhwani, Kailash, "OPSEARCH" **On solving multi-level multi objective linear programming problems through fuzzy goal programming approach**, Vol. 51, NO. 4, pp. 624-637, 2013.
[9] Li, X. q., Zhang, B., Li, H., " Fuzzy sets and systems" **Computing efficient solutions to fuzzy multiple objective linear programming problems**, Vol. 57, No. 10, pp. 1328-1332, 2006.

www.SID.ir

[10] Mahamat Maimos, Balira O. Konfe, Souleymane Koussoube, Blaise Some, "Applied Mathematics" **Alienor Method for Nonlinear Multi-Objective Optimization**, Vol 02, No. 2, pp. 217-224, 2011.

[11] Metev, B., Gueorguieva, D., " European journal of operational research" **A simple method for obtaining weakly efficient points in multiobjective linear fractional programming problems**, Vol. 126, No. 2, pp. 386-390, 2000.

[12] M. Maimos, Y. Cherruault, B. O. Konfe, et all, "Kybernetes" Alienor **method to solve multi-objective linear programming (MOLP)**, Vol. 38, No. 5, pp. 789-799, 2009.

[13] Pastemak H., U. Passy, **Bicriterion mathematical programs with Boolean variables**, in: J. Cochrane and M. Zeleny, Eds., Multiple Criteria Decision Making, University of South Carolina, pp. 327-348, 1973.

[14] Q. Tuyen, H. D. Muu, " Operations research letters" **Biconvex programming approach to optimization over the weakly efficient set of a multiple objective affine fractional problem**, Vol. 28, No. 2, pp. 81-92, 2001.

[15] R.L. Banker, M. Guignard and S.K. Gupta, **An algorithm for generating efficient solutions to the multiple objective integer programming problem**, Working Paper, Applied Research Center, The Wharton School, University of Pennsylvania, 1978.

[16] S. J. Jorge, " Journal of global optimization" **A Bilinear Algorithm for Optimizing a Linear Function over the Efficient Set of a Multiple Objective Linear Programming Problem**, Vol. 31, No. 1, pp. 1-16, 2005.

[17] S. Zionts, "Ann. Discrete Math" **Integer linear programming with multiple objectives**, Vol. 1, pp. 551-562, 1 977.

[18] Tu, Ta Van, " Optimization : A Journal of Mathematical Programming and Operations Research" **A common formula to compute the efficient sets of a class of multiple objective linear programming problems**, Vol. 64, No. 10, pp. 2065-2092, 2015.

[19] Villarreal B., M.H. Karwan, " Technical Report " **Dynamic Programming approaches for multi-criteria integer programming**, No. 78-3, State University of New York at Buffalo , 1978.

[20] Villarreal B., M.H. Karwan, " Technical Report "**Multi criterion integer linear programming: a (hybrid) dynamic programming recursive approach**, No. 78-4, State University of New York at Buffalo, Buffalo, NY, 1978.

[21] Villarreal B., M.H. Karwan, "Technical Report " **Multi criterion integer linear programming: some extensions**, No. 78-5, State University of New York at Buffalo, Buffalo, NY, 1978.

[22] Wu, Yan-Kuen, Liu, Chia-Cheng, Lur, Yung-Yih, " Fuzzy Optimization and Decision Making" **Pareto-optimal solution for multiple objective linear programming problems with fuzzy goals**, Vol. 14, No. 1, pp. 43-55, 2014.

www.SID.ir

International Congress of
Interdisciplinary Studies in Science and Engineering
December 2017 - Iran, Tehran
Archive of SID
کنگره بین المللی
مطالعات میان رشته ای در علوم پایه و مهندسی
آذرماه ۱۳۹۶ - تهران

Weakly efficient points of a linear multiobjective optimization problem

J. Sadeghi, H. Mohebi

Department of Mathematics, Graduate University of Advanced Technology, Kerman, E-mail: sadeghijavad13@yahoo.com
Department of Mathematics, Mahani Mathematical Research Center, Shahid Bahonar University, Kerman, hmohebi@uk.ac.ir

Abstract. The objective of this paper is to find a method for finding the weakly efficient points of a linear multiobjective optimization problem in R^n. *If there exists two objective functions in the multi-objective optimization problem, since the objective functions the problem are linear, the weakly efficient points of this problem are easily found. By use of the weakly efficient points of* two functions in the multiobjective optimization problem, we obtain the weakly efficient points of the main problem. At the end the proposed method is coded by MATLAB language and evaluated for some examples.

Keywords: multiobjective optimization, weakly efficient points, linear multiobjective optimization, linear programming

www.SID.ir