



بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های پیوسته با روش توزیع مصالح و توابع

جریمه اصلاح شده

علی رحمانی فیروزجائی^{۱*}، علیرضا لوائی^۲

۱- استادیار دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل rahmani@nit.ac.ir

۲- دانشجوی دکتری عمران دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل lavaei@stu.nit.ac.ir

چکیده

روش مواد همسانگرد جامد با تابع جریمه SIMP^۱ یکی از روش‌های بهینه‌سازی می‌باشد که با مش‌بندی دامنه مورد نظر و تحلیل اجزا محدود اقدام به بررسی لزوم وجود مصالح در هر المان می‌نماید. در طی این فرایند قاعدتا بعضی از المان‌ها خالی و بعضی دیگر پر می‌شوند اما المان‌هایی وجود دارند که درصدی از مصالح را به خود اختصاص می‌دهند. با توجه به لزوم اجرایی بودن این سازه‌ها و مشکلات احتمالی در این خصوص، با استفاده از تابع پنالتی نسبت به بررسی وضعیت المان‌های میانی اقدام می‌شود و آنها به سمت خالی پر یا خالی بودن سوق داده می‌شوند. هدف از این مقاله بررسی و مقایسه توابع پنالتی موجود و همچنین انجام تغییراتی در نهایت بررسی و مقایسه حاصل از این تغییرات می‌باشد.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی، سازه‌های پیوسته، توپولوژی سازه‌ها، تابع پنالتی

¹ SIMP : Solid Isotropic Material with Penalization





۱- مقدمه

بهینه‌سازی توپولوژی پاسخگوی این سوال می‌باشد که در فضای مشخص مصالح را در چه نقاطی قرار دهیم که بهترین بهره‌وری را داشته باشیم؟ این سوال شاید ابتدا در طرح سازه‌ها مطرح شد اما در شاخه‌های مختلف علوم نظیر سیالات، اکوستیک، الکترومغناطیس و ... کاربرد دارد. بهینه‌سازی توپولوژی یکی از شاخه‌های رو به رشد در مهندسی سازه می‌باشد که در سال‌های اخیر با توجه به وجود کامپیوترهای پرسرعت و توانایی‌های سخت‌افزاری، توسعه زیادی یافته است. اصول اولیه بهینه‌سازی با موضوع خراباها، بیش از یک دهه قدمت دارد [۱]. این عنوان بعدها جهت تیرها توسعه یافته است [۲-۳]. بر همین اساس اصول اولیه بهینه‌سازی توپولوژی توسط پراگر و رزوانی شکل گرفت [۴]. تعمیم قابل توجهی برای بهینه‌سازی توپولوژی در دهه ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۰ ارائه گردید [۵]. آغاز روش‌های کاربردی مبتنی بر اجزا محدود برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها در اواخر دهه ۸۰ و توسط بندسو و کیکوچی آغاز شد [۶]. سپس این روش در جهت‌های مختلفی توسعه یافت، که می‌توان در این خصوص به روش‌هایی مانند تراکم [۷-۸]، روش مجموعه سطوح^۲ [۹] و روش‌های تکاملی^۳ [۱۰] اشاره کرد. روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی را از یک دیدگاه می‌توان بصورت کلی به دودسته تقسیم کرد. گروه اول روش‌های مبتنی بر توزیع مصالح و روش دوم مبتنی بر شرایط مرزی می‌باشند. در روش‌های مبتنی بر توزیع مصالح می‌توان به دو روش محبوب مواد همسانگرد جامد با تابع جریمه یا SIMP و روش تکاملی^۴ ESO اشاره کرد و در روش‌های مبتنی بر شرایط مرزی می‌توان روش مجموعه سطوح تراز را نام برد [۱۱]. در این مقاله تغییراتی در تابع پنالتی که در روش SIMP استفاده شده صورت گرفته و نتایج مورد مقایسه قرار گرفته‌اند.

۲- روش SIMP

روش مواد همسانگرد جامد با تابع جریمه، یکی از زیرمجموعه‌های پرکاربرد روش توزیع مصالح می‌باشد که در بهینه‌سازی سازه‌های پیوسته کاربرد فراوانی دارد. در این روش بعد از مشخص شدن فضای مورد نظر، به هر المان مصالحی اختصاص می‌یابد که خصوصیات مصالح در هر المان ثابت بوده و عمل فضای پیوسته اولیه را به فضایی گسسته تبدیل می‌نماید. متغیر طراحی میزان چگالی در هر المان می‌باشد که صفر بودن آن به معنای خالی بودن المان و یک بودن مقدار آن به معنای پر بودن آن المان می‌باشد. برای حل مسئله از مقادیری بین بازه ۰ تا ۱ استفاده می‌گردد و با استفاده از تابع پنالتی آنها به سمت ۰ (خالی) و ۱ (پر) میل داده می‌شوند. در این مقاله با اعمال تغییراتی در تابع پنالتی مورد استفاده به بررسی و مقایسه نتایج آن پرداخته می‌شود. در این روش تنها مقادیر معلوم در مسئله، بارهای وارده، محل تکیه‌گاه‌ها و حجم مصالح مورد استفاده می‌باشد اما اندازه و شکل و اتصالات درون سازه نامشخص می‌باشند. همچنین رسیدن به جواب در روش توزیع مصالح لازم است روشی نظیر فیلتر حساسیت را بر خروجی نتایج اعمال نمود تا مانع از ایجاد نقاط شطرنجی در سازه شد.

² Level Set Method

³ Evolutionary approaches

⁴ Evolutionary Structural Optimization





در مسئله بهینه‌سازی هدف ماکزیمم کردن سختی سازه تحت بارهای استاتیکی وارده به سازه الاستیک می‌باشد که این مسئله معادل حداقل کردن نرمی در همان سازه است. در روش توزیع مصالح، ابتدا سازه المان بندی می‌گردد. برای سهولت مدلسازی از فضایی مستطیلی استفاده می‌شود که توسط المان‌های مربعی گسسته سازی شده‌اند. در این حالت شماره‌گذاری گره‌ها و المان‌ها راحت خواهد بود. (ستون به ستون از سمت چپ و بالا شروع می‌کنیم) و نسبت ابعاد سازه به عنوان ورودی معرفی می‌گردد. مسئله بهینه‌سازی توپولوژی بر اساس روش توزیع مصالح و با در نظر گرفتن تابع پنالتی به صورت کلی زیر مطرح می‌گردد:

$$(1) \\ n \\ s$$

در فرمول فوق U و F به ترتیب جابجایی و بردار نیروی کلی سازه می‌باشد. K ماتریس سختی کلی، u_e و k_e جابجایی و سختی المان هست. x بردار پارامتر طراحی می‌باشد و x_{min} بردار حداقل مقادیر چگالی است که برای جلوگیری از ناپایداری صفر منظور نمی‌گردد. N نشان دهنده تعداد المان‌های استفاده شده برای گسسته سازی فضای مورد نظر می‌باشد. p ضریب مورد استفاده برای تابع پنالتی می‌باشد. V_0 و $V(x)$ به ترتیب نشان دهنده حجم مصالح و حجم فضای دامنه مورد نظر می‌باشد و f بیانگر نسبت این حجم می‌باشد. مسئله بهینه‌سازی مطرح شده در فرمول شماره ۱ به روش‌های مختلفی قابل حل می‌باشد که از آن میان می‌توان به روش معیار بهینگی (OC)^۵ اشاره نمود. با توجه به سادگی این روش و نتایج قابل قبول آن، در این مقاله از این روش استفاده شده است [۱۲]. سابقه این روش برای مسائل پیوسته مربوط به سال ۱۹۶۰ می‌باشد. این روش برای مسائلی با تعداد زیاد متغیر طراحی و تعداد کم قیده‌های بهینه‌سازی مناسب است.

$$(2) \\ X$$

در رابطه ۲ که روش معیار بهینگی را نشان می‌دهد، X_e^{new} بیانگر مقدار جدید چگالی مصالح در هر المان می‌باشد که این مقدار در طی روال بهینه‌سازی و تلاش‌های مختلف انجام شده، دائم به روزرسانی می‌گردد. در رابطه فوق مقدار m عددی مثبت بین صفر تا یک می‌باشد و برای جلوگیری از تغییر زیاد در چگالی المان‌ها بین دو تکرار متوالی استفاده می‌گردد. ضریب n معمولاً عدد ۰/۵ فرض می‌گردد. ضریب Be بر مبنای مشتق تابع هدف و ضریب لاگرانژ محاسبه می‌گردد [۱۳]. این الگوریتم در مسائل زیادی از بهینه‌سازی توپولوژی استفاده شده است. یکی از نکات استفاده از این الگوریتم این است

⁵ Optimality Criteria





که هر متغیر مستقل از سایر پارامترها به روزرسانی می‌شود و نیاز به برنامه‌نویسی پیچیده‌ای ندارد. با توجه به مستقل بودن نتایج حاصل برای هر المان از سایر المان‌ها، امکان وقوع نقاط شطرنجی در طرح موردنظر وجود دارد که برای حل آن بایستی راهکارهای مختلف نظیر اعمال فیلترینگ بررسی شوند. در خصوص اعمال فیلترینگ، با در نظر گرفتن شعاع دلخواه، دامنه‌ای برای تاثیرگذاری بر چگالی المان مورد نظر انتخاب می‌شود و سپس بر مبنای روابط موجود، چگالی المان‌های واقع در دامنه با توجه به آن دامنه تغییر می‌یابند [۱۴].

۲- توابع پنالتی مورد استفاده

همانگونه که مشاهده گردید، با توجه به اینکه مقادیر x در دامنه صفر تا یک متغیر می‌باشد و بعضاً در روال بهینه‌سازی المان‌هایی وجود دارد که دارای چگالی متوسط هستند. اگر المان‌های خالی با رنگ سفید و المان‌های پر با رنگ مشکی نمایش داده شوند، این المان‌های میانی رنگ خاکستری دارند. وجود چنین المان‌هایی باعث می‌گردد نتیجه حاصل از بهینه‌سازی در عمل قابلیت ساخت نداشته باشد. برای حل این مشکل و کاهش المان‌های خاکستری، از تابع پنالتی استفاده می‌گردد. استفاده از تابع پنالتی باعث سوق دادن نتایج به سمت صفر یا یک گردیده و عملاً باعث کاهش نقاط خاکستری می‌باشد. توابع پنالتی مختلفی برای این موضوع پیشنهاد گردیده است. یکی از توابع پنالتی به نام روش قانون توان^۶ می‌باشد که به شکل زیر عمل نموده و مقدار چگالی را مستقیماً به توان می‌رساند.

$$E \quad (3)$$

مقدار P در رابطه فوق بایستی بزرگ‌تر از ۱ باشد و انتخاب عدد ۳ برای آن می‌تواند نتایج خوبی در بر داشته باشد [۱۴]. یکی دیگر از روش‌های اعمال تابع پنالتی، روش $RAMP^7$ می‌باشد. در این روش از رابطه زیر استفاده می‌گردد:

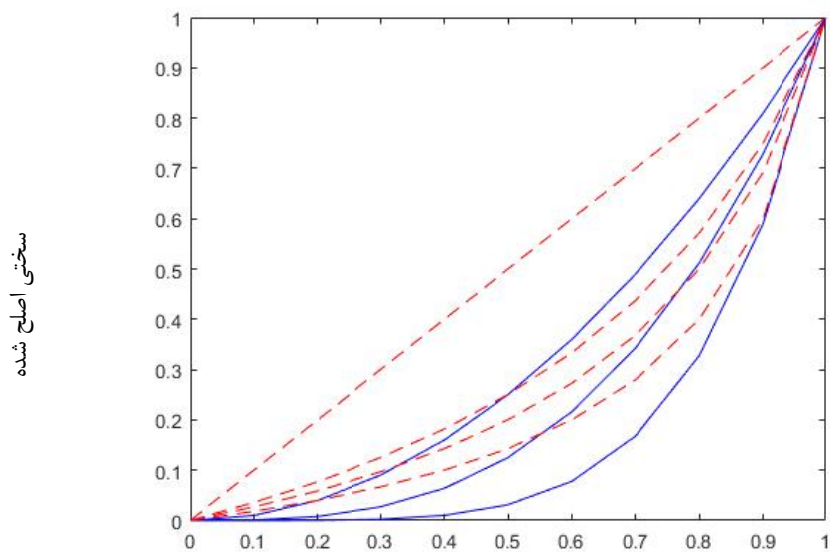
$$E \quad (4)$$

در رابطه فوق مقدار q بایستی بیشتر از ۰ در نظر گرفته شود. با وجود اینکه این رابطه بعد از رابطه **Error! No text of specified style in document.** ارائه گردید اما در مسائل خیلی از آن استفاده نشده و رابطه قبلی کاربرد بیشتری دارد. در شکل زیر مقایسه نتایج حاصل از استفاده از این دو روش بر مقادیر چگالی نشان داده شده است.

⁶ Power-law approach

⁷ Rational Approximation of Material Properties





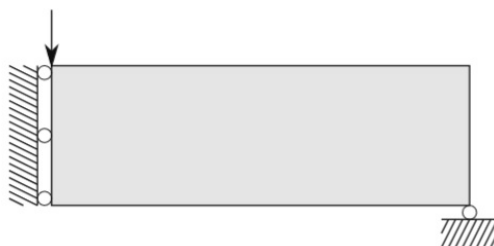
سختی مصالح

تصویر ۱: خطوط پیوسته نشان دهنده تابع رابطه ۳ با توان‌های ۲ و ۵ (به ترتیب) و خط چین نشان دهنده تابع رابطه ۴ با ضرایب ۰ و ۲ و ۵ می‌باشد.

یکی از کارهایی که در این مقاله انجام شده، علاوه بر حالت‌های فوق، تغییر تابع جریمه بصورت پویا در طی حل مسئله می‌باشد. در این مقاله مقدار ضریب P مربوط به تابع پنالتی از عدد ۱ شروع شده و در طی روال بهینه‌سازی افزایش می‌یابد. نتایج حاصل از این تغییرات در حل چند مسئله در قسمت بعدی مطرح گردیده است.

۳- حل مسئله

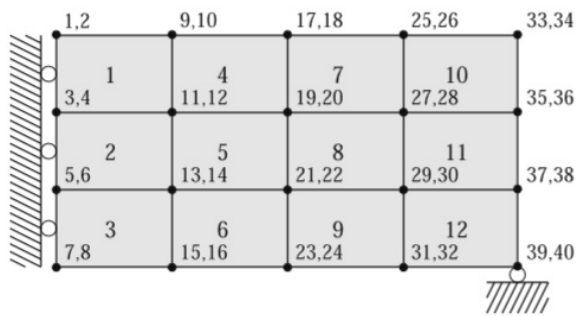
مثال مورد بررسی در این مقاله تیر ساده تحت اثر بار منفرد در وسط آن می‌باشد که به دلیل تقارن نصف آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدل تیر به شکل زیر می‌باشد:



تصویر ۲: تیر مورد نظر و شرایط مرزی و بارگذاری آن



برای تحلیل تیر فوق نیاز به المان بندی آن می باشد که در شکل زیر بصورت شماتیک با در نظر گرفتن ۴ المان افقی و ۳ المان قائم، نمایش داده شده است. در حل مثال فوق، با فرض مربع بودن المان ها و با انتخاب تعداد مناسب در هر جهت، ابعاد دامنه اصلی تامین می گردد.



تصویر ۳: مدل المان بندی فرضی

۴- نتایج :

با المان بندی تیر نشان داده شده در تصویر شماره ۲، با ۷۰ المان افقی و ۲۵ المان قائم، نتایج مطابق جدول زیر خواهد بود. منظور از R مقدار دامنه در نظر گرفته شده برای تاثیر المان های مجاور جهت حذف نقاط شطرنجی می باشد. همچنین It بیانگر تعداد تلاش جهت رسیدن به نقطه بهینه بوده و Comp نشان دهنده تابع هدف می باشد. در مرحله اول همانگونه که در تصویر ۴ نشان داده شده، با انتخاب عدد ۱ به عنوان ضریب مربوط به تابع پنالتی عملا نقش آن در حذف المان های میانی نادیده گرفته می شود. به همین دلیل حاصل کار نقاط خاکستری بسیاری دارد که غیر قابل حذف می باشد. تعداد توالی انجام شده جهت رسیدن به جواب ۹ مرتبه و تابع هدف عدد ۱۴۰٫۵ می باشد. در این حالت تغییر شعاع فیلتراسیون برای حذف نقاط شطرنجی با شعاع های مختلف تاثیری در نتایج ندارد.

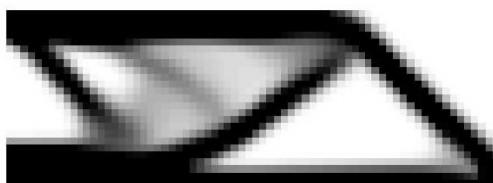


تصویر ۴- با تعداد ۹ بار تلاش و شعاع فیلتراسیون بین ۱ تا ۳ و نتیجه تابع هدف ۱۴۰٫۵

در نتایج نشان داده شده در شکل های ۵ تا ۷، مقدار پنالتی ۲ فرض شده اما ضریب فیلتراسیون بین ۱ تا ۳ المان تغییر یافته است. همانگونه که مشاهده می گردد افزایش شعاع تاثیر پذیری المان ها باعث حذف نقاط شطرنجی می گردد اما همچنان وجود نقاط خاکستری در نتایج مشهود می باشد. در نتایج نشان داده شده در شکل های ۸ تا ۱۰، مقدار ضریب پنالتی ۳ فرض شده و شعاع فیلتراسیون بین ۱ المان تا ۳ المان تغییر یافته است.



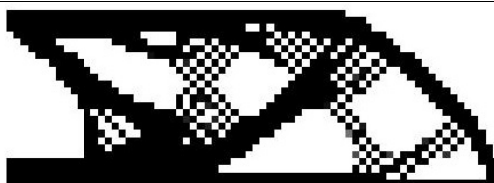
تصویر ۵- تعداد تلاش ۹۰، شعاع فیلتراسیون ۱، ضریب پنالتی ۲، تابع هدف ۱۵۵



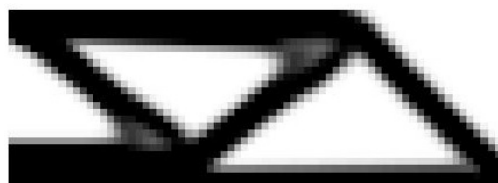
تصویر ۶- تعداد تلاش ۶۷، شعاع فیلتراسیون ۲، ضریب پنالتی ۲، تابع هدف ۱۷۶



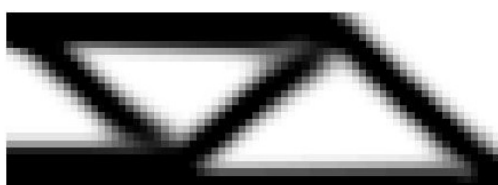
تصویر ۷- تعداد تلاش ۳۱، شعاع فیلتراسیون ۳، ضریب پنالتی ۲، تابع هدف ۱۸۷,۶



تصویر ۸- تعداد تلاش ۴۳، شعاع فیلتراسیون ۱، ضریب پنالتی ۳، تابع هدف ۱۶۹



تصویر ۹- تعداد تلاش ۶۳ ، شعاع فیلتراسیون ۲ ، ضریب پنالتی ۳ ، تابع هدف ۱۷۳,۸

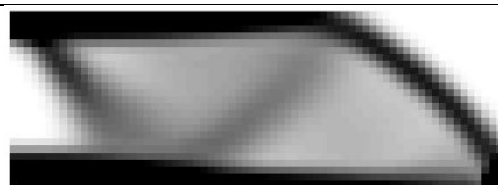


تصویر ۱۰- تعداد تلاش ۷۵ ، شعاع فیلتراسیون ۳ ، ضریب پنالتی ۳ ، تابع هدف ۱۸۳,۹

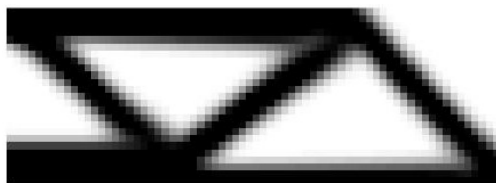
در ادامه با اختصاص عدد یک به عنوان ضریب پنالتی و افزایش یکنواخت آن در طی کار و در هر مرحله به میزان ۰,۱ ، نتایج جدیدی حاصل می‌گردد که در شکل‌های ۱۱ تا ۱۴ مشاهده می‌گردد. در هر کدام از شکل‌ها مقدار تابع پنالتی در آن گام نشان داده شده است.



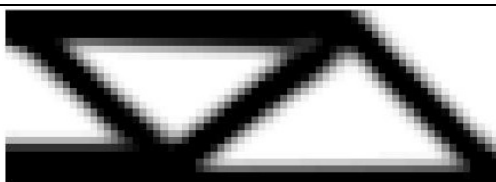
تصویر ۱۱- در تلاش ۵ ام ، شعاع فیلتراسیون ۱ ، ضریب پنالتی در این مرحله ۱,۵ ، تابع هدف ۱۶۷,۰۱



تصویر ۱۲- در تلاش ۲۰ ام ، شعاع فیلتراسیون ۱ ، ضریب پنالتی در این مرحله ۳ ، تابع هدف ۲۴۴



تصویر ۱۳- در تلاش ۳۰ ام ، شعاع فیلتراسیون ۱ ، ضریب پنالتی در این مرحله ۴ ، تابع هدف ۱۸۹٫۴

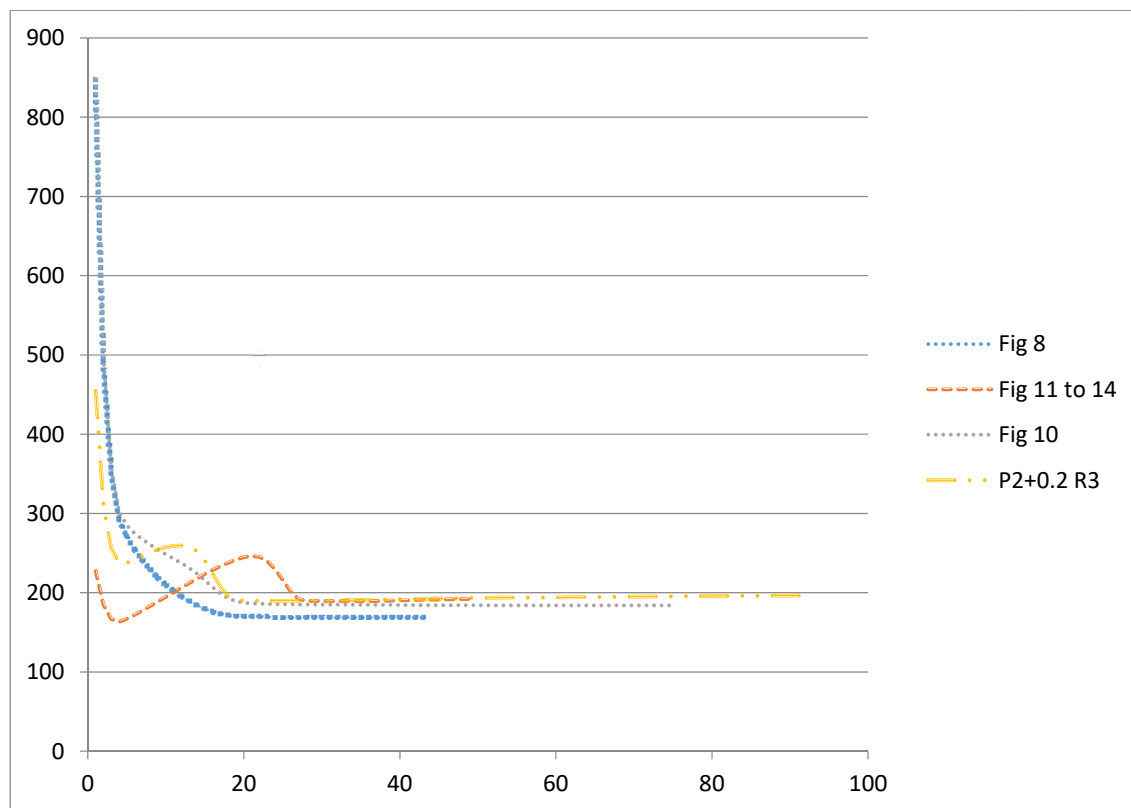


تصویر ۱۴- در تلاش ۴۰ ام ، شعاع فیلتراسیون ۱ ، ضریب پنالتی در این مرحله ۵ ، تابع هدف ۱۹۰٫۲

۵- نتیجه گیری

اولین نکته حاصل از مقایسه نتایج فوق با حالتی که ضرایب ثابت می باشد، نرخ تغییرات افزایشی و کاهش‌ی تابع هدف در مسیر گام‌های بهینه‌سازی می باشد در صورتیکه در انتخاب ضریب پنالتی با عدد ثابت، نرخ تغییرات تابع هدف بصورت کاهش‌ی می باشد که در نمودار ۱ مقایسه گردیده است. این تغییرات نوسانی تابع هدف با انتخاب ضریب پنالتی اولیه متفاوت و نرخ تغییر متفاوت آن، همچنان پابرجا می ماند.

دومین نکته میزان تغییرات تابع هدف خصوصا در گام‌های اولیه است. تغییرات تابع هدف در حالتی که ضرایب پنالتی ثابت بوده‌اند بسیار بیشتر از حالتی بوده که ضریب تابع پنالتی متغیر بوده است. در نتیجه اعداد اولیه حاصل از تابع هدف خصوصا هنگام ثابت بودن ضریب پنالتی غیر قابل اعتماد می باشد. در عوض در طول مسیر بهینه‌سازی، نوسانات تابع هدف در تلاش‌های متفاوت کاهش می یابد. بنابراین شرط همگرایی مسئله با در نظر گرفتن اختلاف ناچیز بین دو تابع هدف متوالی به راحتی محقق می گردد، ولی همانگونه که در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ معلوم است شکل نهایی سازه تغییر جزئی دارد ولی اختلاف تابع هدف مانند حالت قبل نیست و مسئله نیاز به کنترل‌های دیگری برای همگرایی و توقف دارد.



تصویر ۱۵: مقایسه نتایج حاصل در تصویر ۸، مسیر بهینه شدن در تصاویر ۱۱ تا ۱۴، روال بهینه‌سازی تصویر ۱۰ و مدل دیگری با فرض شروع پناستی از ۲ و افزایش گام ۰,۲

مراجع :

Paper:

- [1] A. Michell, "the limits of economy of material in frame structures.," *Phil. Mag.* 8, pp. 589-597, 1904.
- [2] G. Rozvany, "Grillages of maximum strength and maximum stiffness.," *Int. J. Mech. Sci.* 14, pp. 651-666, 1972a .
- [3] G. Rozvany, "Optimal load transmission by flexure.," *Com. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1, pp. 253-263, 1972b.
- [4] W. Prager , G. Rozvany, "Optimization of structural geometry," *Dynamical systems*, pp. 265-293, 1977.
- [5] G. Rozvany, "Optimal layout theory : analytical solutions for elastic structures with several deflection constraints and load conditions.," *Struct. Opt.*, pp. 247-249, 1992.





- [6] K. N. Bendsoe MP, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," *Comput Methods Appl Mech Eng* 71, pp. 197-224, 1988.
- [7] B. MP, "Optimal shape design as a material distribution problem," *Struct Optim*, pp. 193-202, 1989.
- [8] R. G. Zhou M, "The COC algorithm part II, Topological, geometry and generalized shape optimization," *Comput Methods Appl Mech Eng* 89, pp. 309-336, 1991.
- [9] J. F. A. Allaire G, "structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method," *J Comput Phys*, pp. 363-393, 2004.
- [10] S. G. Xie YM, "A simple evolutionary procedure for structural optimization," *Comput Struct*, pp. 885-896, 1993.
- [11] F. Zhao, "topology optimization with meshless density variable approximations and BESO method," *Computer-aided design* 56, pp. 1-10, 2014.
- [12] Z. Wasiutynski, "On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to equal strength," *Bull. deL 'Academie Polonaise des Sciences, Serie des Sciences Techniques*, pp. 259-268, 1960.
- [13] O. Sigmund, "A 99 line topology optimization code written in matlab," *Struct Multidisc Opt.* 21, pp. 120-127, 2001.
- Book :
- [14] Sigmund O. , Bendsoe MP, "Topology optimization, theory , methods and applications", springer, 2004.