



تحلیل عددی مسائل الاستیسیته مسطح با استفاده از روش بدون شبکه

گالرکین

فرزاد حسینجانزاده سرستی^{۱*}، علی رحمانی فیروزجائی^۲، سینا کیانی^۳

۱- کارشناس ارشد مهندسی عمران گروه سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، Seresti@ymail.com

۲- استادیار دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، گروه سازه‌های هیدرولیکی Rahmani@nit.ac.ir

۳- کارشناس ارشد مهندسی عمران گروه سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، S.kiani@stu.nit.ac.ir

چکیده

برای طراحی و شناخت سیستم‌های مهندسی پیشرفته نیاز به حل معادلات دیفرانسیل پیچیده می‌باشد. به منظور حل این‌گونه مسائل، روش‌های عددی متنوعی با دقت و پیچیدگی‌های مختلف وجود دارد که می‌توان به اختلافات محدود، اجزای محدود و غیره اشاره کرد که هر یک مزیت و معایب خاص خود را دارد. این روش‌ها همگی به ایجاد شبکه برای برقراری ارتباط بین گره‌ها نیاز دارند. امروزه روش‌هایی در حال توسعه می‌باشد که نیاز به برقراری رابطه بین گره‌ها در دامنه محاسباتی نمی‌باشد که خود یک مزیت عمده می‌باشد. یکی از شناخته شده ترین آنها روش بدون شبکه گالرکین است. در این پژوهش، برنامه‌ای به زبان فرترن ۹۰ و روش بدون شبکه گالرکین (EFG)، برای حل مسائل الاستیسیته مسطح مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش از تابع شکل حداقل مربعات متحرک به منظور گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل حاکم از روش گالرکین استفاده شده است. اثرات اندازه شعاع تاثیر گره‌ها، شکل دامنه تاثیر و همچنین تعداد نقاط انتگرال گیری بر دقت و کارایی روش، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: روش‌های عددی، روش بدون شبکه گالرکین، مسائل الاستیسیته مسطح، شعاع تاثیر.





۱- مقدمه

ایده اولیه روش‌های بدون المان به کاربرد روش هیدرودینامیک ذره هموار شده^۱ در مدل کردن مسائل مربوط به اخترا فیزیک توسط گینگولد و مونقان در سال ۱۹۷۷ بر می‌گردد که در حل آنها به علت نامحدود بودن ناحیه حل، شرایط مرزی وجود ندارد [۲،۱]. جانسون و بسل روش جدیدی را به منظور اصلاح روش SPH و محاسبه کرنش‌ها (مشتقات) ارائه کردند. لوسی در ۱۹۷۷ از روش SPH برای بررسی فرضیه فویون استفاده کرد و مساله دینامیک گاز را بدون در نظر گرفتن مرز با استفاده از روش (Collocation) حل نمود [۳]. روش برآورد کرنل^۲ که یک روش برای تقریب زدن توابع پیوسته است، توسط مونقان و همکاران در سال ۱۹۸۲ ارائه گردید [۴]. این روش فاقد دقت لازم در تحلیل معادلات دیفرانسیل جزئی بود. نایرولز و همکاران در ۱۹۹۲ برای اولین بار از روش درون‌یابی حداقل مربعات متحرک^۳ برای پیدا کردن توابع شکل در روش حل گالرکین استفاده نمودند و روشی را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معمولی ارائه نمودند که روش المان پخش شده^۴ (DEM) نامیده می‌شود [۵]. روش بدون شبکه گالرکین^۵ (EFG) که نسبت به دیگر روش‌های بدون شبکه از دقت بالاتری برخوردار است توسط بلیشکو و همکاران در سال ۱۹۹۴ ارائه شد [۶]. در واقع این روش را باید شروع بکارگیری حداقل مربعات در روش‌های بدون شبکه تلقی کرد. روش‌های بدون شبکه دیگری مانند باز تولید کننده کرنل ذرات^۶ توسط جان و لیو [۷]، و روش اجزای محدود افزاز واحد^۷ توسط ملنگ و بابوسکا [۸] و روش ابرهای hp^۸ توسط دوارت و همکاران [۹] و روش پتروف-گالرکین محلی^۹ توسط اتلوری و همکاران ارائه شدند [۱۰].

ارزانی و افشار، یک روش جدید بدون شبکه را که مبتنی بر فرآیند حداقل مربعات بود تحت عنوان حداقل مربعات گسسته^{۱۰} ارائه کردند. در این روش همانند دیگر روش‌های بدون شبکه، دامنه محاسباتی توسط تعداد محدود نقاط گرهی با توزیع دلخواه گسسته سازی می‌شود. این روش تاکنون برای حل مسائل تراوش اثبات شده است [۱۱-۱۳] و [۱۴]. بعدها نیسی پور و همکاران در حل مسائل الاستیسیته خطی این روش را بکار بردند [۱۵]. روش حداقل مربعات گسسته مختلط توسط امانی و همکاران برای حل مسائل الاستیسیته خطی مسطح ارائه شد [۱۶]. در این تحقیق بر خلاف روال متعارف که ابتدا جابجایی سپس تنش بدست می‌آید، با استفاده از فرمول بندی مختلط جابجایی و تنش همزمان بدست می‌آید. روش غنی سازی آرایش گره‌ها یکی از روش‌های تظریف تطبیقی خطا در روش بدون شبکه می‌باشد. این روش با کاهش فاصله بین گره‌ها در نقاطی که گرادپان خطا زیاد است باعث کاهش خطا می‌گردد. افشار و همکاران این روش را برای غنی سازی شبکه با

¹ Smoothed-particle hydrodynamics (SPH)

² Kernel Estimates

³ Moving Least Squares (MLS)

⁴ Diffuse Element Method (DEM)

⁵ Element Free Galerkin Method (EFG)

⁶ Reproduction Kernel Particle Method (RKPM)

⁷ Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)

⁸ Hp Clouds Method

⁹ Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)

¹⁰ Discrete least square method (DLSM)





استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته و برای مسائل الاستیسیته خطی بکار برده‌اند. روش جابجایی گره‌ها نیز یک روش تعریف تطبیق خطا در روش بدون شبکه است که توسط افشار و همکاران با جابجا کردن گره‌ها به قسمتی از مسئله که خطای بیشتری دارد، باعث کاهش خطا در آن نقاط می‌گردد. روش دیگری که توسط فرجی و افشار و همچنین ارزانی و همکاران ارائه گردید روش غنی سازی-جابجایی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط است که برای بهبود دقت جواب در مسائل الاستیسیته دو بعدی مسطح ارائه گردید [۱۷، ۱۸].

۲- فرمول بندی روش بدون شبکه گالرکین

روش بدون شبکه گالرکین که اولین بار توسط بلیشکو و همکاران ارائه گردید و دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

- ۱- استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متحرک برای تقریب
- ۲- استفاده از گالرکین ضعیف شده برای گسسته سازی معادلات حاکم
- ۳- نیاز به ایجاد شبکه برای انتگرال گیری از ماتریس مسئله

مسئله دو بعدی الاستیسیته خطی استاندارد در نظر گرفته شده است که در دامنه Ω و داخل مرز Γ تعریف شده است. معادله دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی برای مسائل مکانیک جامدات دو بعدی به فرم زیر مطرح می‌شود:

$$L^T \sigma + b = o \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\text{شرایط مرزی نیومن: } \sigma_n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t$$

$$\text{شرایط مرزی دیریشله: } u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u$$

که در روابط بالا، σ^T بردار تنش، u^T و b^T به ترتیب بردارهای جابجایی و نیروی وزن است. در روش EFG از تابع تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS) استفاده می‌شود.

$$\int_{\Omega} \delta (Lu)^T D(Lu) d\Omega = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \delta u_i^T K_{IJ} u_j \quad (2)$$

ابعاد ماتریس سختی کل بصورت $(2n \times 2n)$ می‌باشد. ماتریس K_{IJ} یک ماتریس 2×2 می‌باشد که n تعداد کل گره در دامنه می‌باشد.

$$K_{(2n \times 2n)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega = \int_{\Omega} \left(\delta \sum_{l=0}^n \Phi_l u_l \right)^T b d\Omega = \sum_{l=0}^n \delta u_l^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_l^T b d\Omega}_{F_l^b} \quad (4)$$

که F_l^b بردار نیروی ثقل گرهی و بصورت زیر می‌باشد:





$$F_I^b = \int_{\Omega} \Phi_I^T b d\Omega \quad (5)$$

$$\int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma = \sum_{I=0}^n \delta u_I^T \underbrace{\int_{\Gamma} \Phi_I^T \bar{t} d\Gamma}_{F_I^t} \quad (6)$$

که در این رابطه F_I^t بردار نیروی خارجی وارده بر گره‌ها می‌باشد.

به همین ترتیب می‌توان ترم چهارم را که برای ارضای شرایط مرزی بدلیل نداشتن خاصیت دلتای کرونگر، اضافه شده را بدست آورد. در مجموع با بازنویسی رابطه تعادل، گسسته سازی به روش EFG، منتج به رابطه زیر می‌شود:

$$\delta u^T [KU + K^{\alpha}U - F^b - F^t - F^{\alpha}] = 0 \quad (7)$$

برای آن که رابطه بالا همیشه برقرار باشد، باید:

$$[KU + K^{\alpha}U - F^b - F^t - F^{\alpha}] = 0 \quad (8)$$

$$[K + K^{\alpha}]U = F + F^{\alpha} \quad (9)$$

در رابطه (۹)، U بردار پارامتر گره‌ای برای جابجایی تمامی گره‌ها در دامنه محاسباتی، K ماتریس سختی کل و از جمع ماتریس سختی گره‌ای می‌باشد، و F جمع ماتریس نیرو که شامل F^b و F^t است می‌باشد. ماتریس K^{α} که ماتریس سختی پنالتی می‌باشد، همانند ماتریس سختی کل بدست می‌آید و بصورت زیر می‌باشد:

$$K_{IJ}^{\alpha} = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \alpha \Phi_J d\Gamma \quad (10)$$

K_{IJ}^{α} ماتریس 2×2 می‌باشد. در معادله $[K + K^{\alpha}]U = F + F^{\alpha}$ بردار نیروی پنالتی F^{α} باعث می‌شود که شرط دیریشله روی مرز تامین شود و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_I^{\alpha} = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \alpha \bar{u} d\Gamma \quad (11)$$

در روابط (۱۰) و (۱۱)، $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k]$ یک ماتریس قطری با درایه‌های ضریب پنالتی می‌باشد. برای $k=2$ مسائل دو بعدی و $k=3$ برای سه بعدی. ضریب پنالتی $\alpha_i = (i = 1, 2, \dots, k)$ می‌تواند تابعی از مختصات گره بوده است. از روی تجربه می‌توان گفت این ضریب ثابت و عدد بزرگ و مثبت می‌باشد.

۳- مسائل عددی

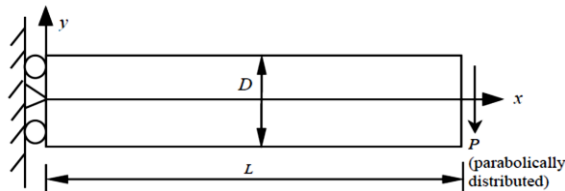
در ادامه با استفاده از برنامه‌ی نوشته شده به زبان فرترن، پارامترهایی همانند شعاع تاثیر، شکل شعاع تاثیر، تعداد گره‌ها، نقاط گوس برای انتگرال گیری مورد بررسی قرار گرفته است.

۳-۱- تیر کنسولی با بار برشی در انتها





تیر دارای ضخامت واحد و بصورت تنش مسطح شکل ۱، در نظر گرفته می‌شود. جواب تحلیلی این تیر همانطور که در ادامه ارائه شده موجود می‌باشد، (تیموشنکو و گودیر ۱۹۷۰). مشخصات این تیر و بارگذاری وارده در جدول ۱، نمایش داده شده است. در ادامه، مقایسه جواب تحلیلی با روش EFG (weak-form) و روش FEM، تاثیر سلول‌های انتگرال گیری در مقدار خطا مورد ارزیابی قرار گرفته است. در شکل ۲، مقایسه پاسخ‌ها نشان داده شده است.

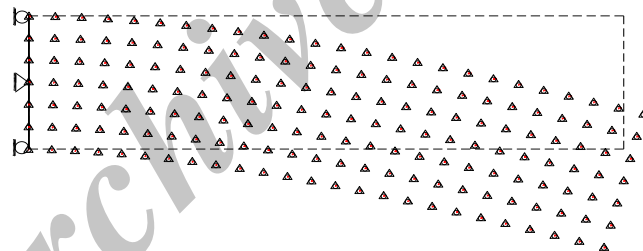


شکل ۱: تیر با بار برشی در انتها

جدول ۱: مشخصات تیر و بارگذاری وارده

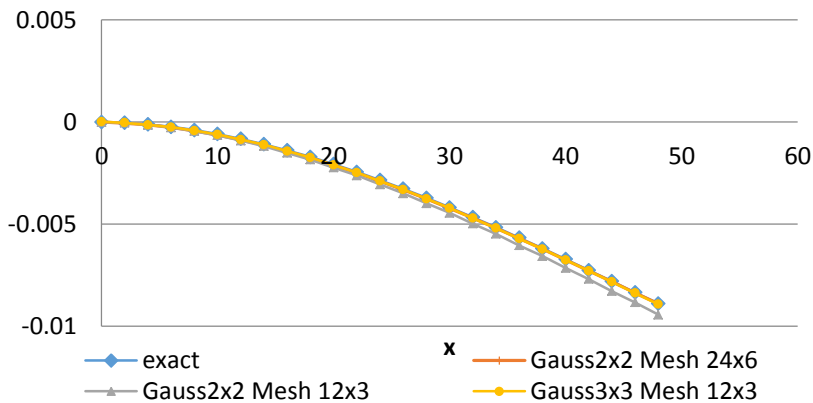
بار وارده	طول تیر	ضخامت تیر	ضریب پواسون	مدول یانگ
$P = -1000$	$L = 48$	$D = 12$	$\nu = 0.3$	$E = 3 \times 10^7$

در اولین اجرای برنامه از ۱۷۵ گره با 6×24 سلول انتگرال گیری و نقاط گوس 2×2 استفاده شده است.



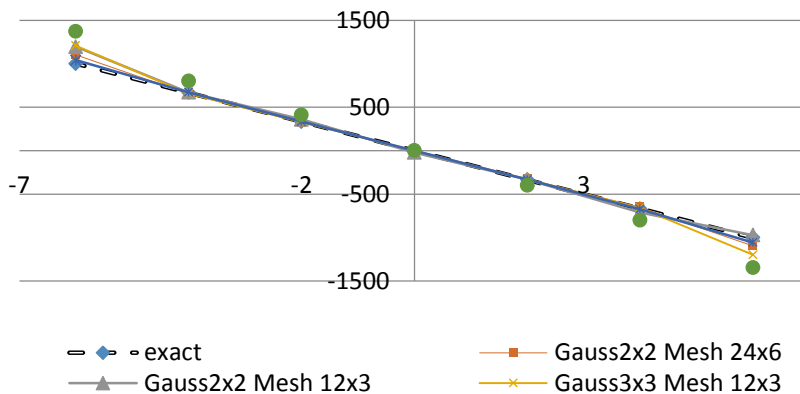
شکل ۲: مقایسه تغییر مکان جواب تحلیلی و عددی O جواب تحلیلی، Δ جواب EFG

این فرآیند برای سلول‌های انتگرال گیری 4×12 ، 3×12 و نقاط گوس 3×3 ، 2×2 و 4×4 تکرار گردید. در انتها، این تیر به روش اجزای محدود نیز مورد بررسی قرار گرفت و مقایسه‌ای با روش بدون شبکه و جواب تحلیلی صورت گرفت.



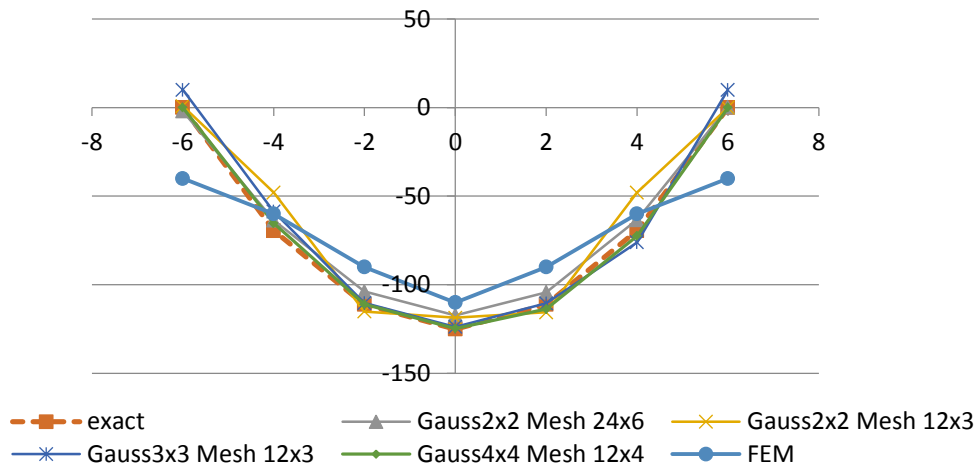
شکل ۳: جابجایی گره‌ها با استفاده از سلول‌های مختلف انتگرال‌گیری و نقاط گوس مختلف و مقایسه با روش تحلیلی در راستای محور x و خط $y=0$

پارامترهای دخیل در این بررسی شامل تعداد نقاط گوس و تعداد سلول‌های انتگرال‌گیری می‌باشد. با زیاد کردن تعداد نقاط گوس از 2×2 در هر سلول به 3×3 پیشرفت زیاد در دقت مسئله مشاهده گردید. همچنین با متراکم کردن سلول‌های انتگرال‌گیری و افزایش آنها از ۳۶ به ۱۴۴، رشد دقت در جواب قابل رویت است. در این پژوهش، نزدیک بودن جواب در حالت نقاط گوس 3×3 به همراه سلول انتگرال‌گیری 3×12 و حالت نقاط گوس 2×2 به همراه سلول انتگرال‌گیری 6×24 مورد توجه قرار گرفته است که حالت دوم با نقاط گوس 2×2 به همراه سلول انتگرال‌گیری 6×24 دارای درصد خطای اندکی کمتر و جواب بهتری می‌باشد اما زمان لازم برای محاسبه جواب نسبت به حالت نقاط گوس 3×3 به همراه سلول انتگرال‌گیری 3×12 نسبتاً بیشتر است.

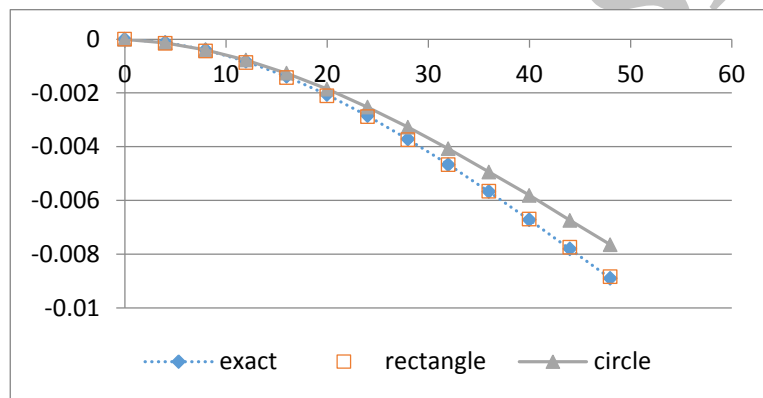


شکل ۴: تنش نرمال در $x=L/2$ مقایسه تنش نرمال به روش تحلیلی و روش EFG با روش FEM





شکل ۵: مقایسه تنش برشی به روش تحلیلی و روش EFG با روش FEM

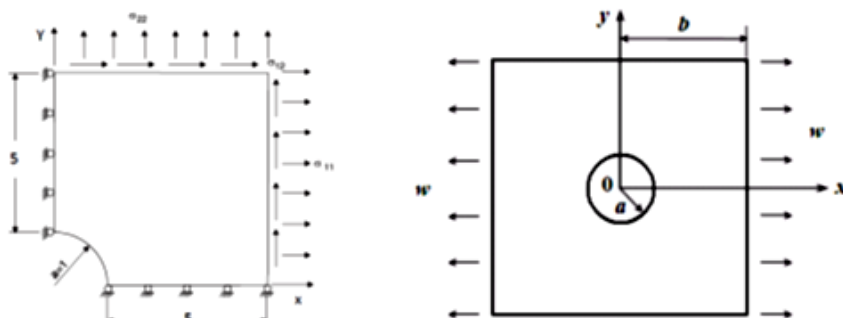


شکل ۶: جابجایی در راستای y در امتداد $y=0$

۳-۲- صفحه بی نهایت با سوراخ دایره ای

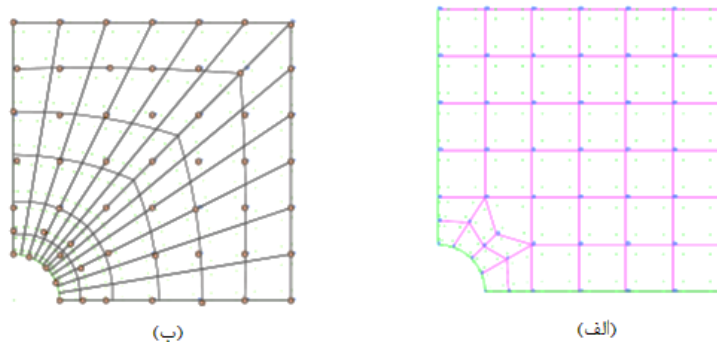
صفحه بی نهایت با سوراخ دایره ای در وسط آن که معادله سوراخ آن $x^2 + y^2 = a^2$ می باشد و a شعاع دایره می باشد. صفحه تحت بار یکنواخت σ ، در راستای x ، بی نهایت قرار گرفته است. همان گونه که در شکل ۷، نشان داده شده است بواسطه تقارن فقط ربع سمت راست و بالای این صفحه ($0 \leq x \leq 6$ و $0 \leq y \leq 6$) مدل شده است. با توجه به تقارن موجود اعمال شرایط مرزی در گوشه سمت چپ $x = 0$ و در قسمت پایین $y = 0$ و در قسمت منحنی $a = 1$ لبه آزاد در نظر گرفته می شود. در $x = 6$ بار گسترده $\sigma = 1000 \frac{kg}{m^2}$ در جهت x وارد می شود. مسئله بصورت تنش مسطح با مدول الاستیسیته $E = 2 \times 10^6 \frac{kg}{m^2}$ و ضریب پواسون $\nu = 0.3$ با ضریب پینالتی 10^8 می باشد.





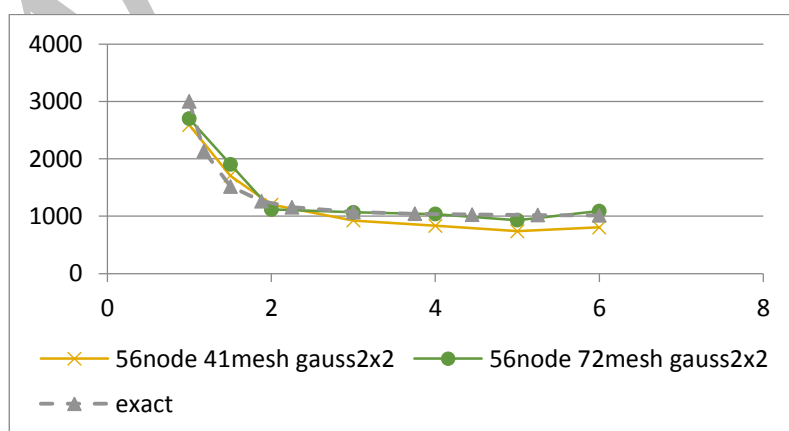
شکل ۷: صفحه با سوراخ دایره‌ای و بار وارده در بی‌نهایت

در گام اول با ۵۶ گره و ۴۱ سلول برای انتگرال گیری و با استفاده از گوس 2×2 دامنه مسئله همانند گسسته شد. تابع وزن استفاده شده W_1 و دامنه تاثیر دایره‌ای می‌باشد.

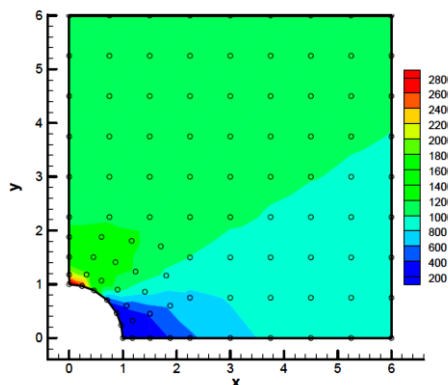


شکل ۸: صفحه سوراخ‌دار با ۵۶ گره و استفاده از گوس 2×2 ، (الف) ۴۱ سلول، (ب) ۷۲ سلول

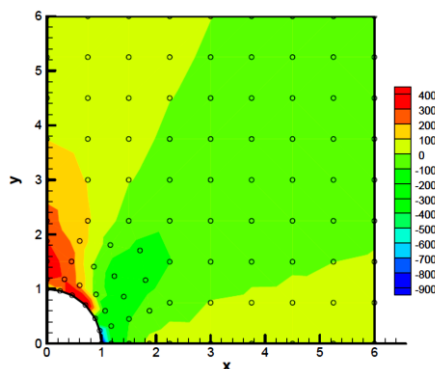
نتیجه مقایسه تنش‌های بدست آمده از روش بدون شبکه گالریکین با پاسخ‌های تحلیلی در راستای محور y و $x=0$ برای گسسته سازی ۵۶ نقطه گرهی، ۴۱ و ۷۲ سلول انتگرال گیری و نقاط گوس 2×2 در اشکال ۹، ۱۱ تا ۱۱، مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۹: تنش نرمال در راستای y و $x=0$



شکل ۱۰: توزیع تنش نرمال σ_{xx} در کل صفحه با ۱۰۰ نقطه گرهی و ۷۲ سلول



شکل ۱۱: توزیع تنش نرمال σ_{yy} در کل صفحه با ۱۰۰ نقطه گرهی و ۷۲ سلول

۴- نتیجه گیری

هدف از این پژوهش تحلیل مسائل الاستیسیته دو بعدی خطی به روش بدون شبکه گالرکین بوده و به منظور بررسی خطا و دقت روش مورد استفاده، پارامترهای مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. روش بدون شبکه گالرکین برای حل مسائل الاستیسیته دو بعدی خطی بدلیل استفاده نشدن از فرآیندی به نام مش بندی که حاصل آن راحتی در گسسته سازی دامنه محاسباتی نسبت به دیگر روش ها، مدل کردن مسائل با شکل هندسی پیچیده تر، دقت در ارائه جواب می باشد، بسیار کاربرد دارد و امروزه مورد توجه طیف کثیری از محققان قرار گرفته است. برای تقریب در روش گالرکین، روش حداقل مربعات متحرک به کار گرفته شده است و همچنین از زبان برنامه نویسی فرترن ۹۰ به منظور تحلیل مسائل مختلف استفاده شده است. در این پژوهش با مسائل تیر کنسولی و صفحه بی نهایت سوراخ دار، به بررسی تاثیر پارامترهای مختلف در مقدار خطای به دست آمده و دقت روش مذکور پرداخته شده است. از این رو نتایج زیر مشاهده گردید:

- دانسیته گره ها، که هرچه این تعداد بیشتر باشد دقت حاصل شده بیشتر و هزینه محاسبه افزایش خواهد یافت.





- با بررسی سلول انتگرال گیری، نقاط گوس و تابع وزن های مختلف به همراه شعاع تاثیرهای مختلف به تحلیل حساسیت پرداخته شد و مشاهده گردید هر چه نقاط گوس افزایش یافت دقت بیشتر شده و زمان بر شدن فرآیند بیشتر به چشم آمده است تا جایی ادامه دارد که روند همگرایی کاهش می یابد.
- تغییر شکل های بوجود آمده در این روش نسبت به سلول انتگرال گیری و نقاط گوس حساسیت کمتری نشان داد این درحالی است که جواب تنش های ایجاد شده به این پارامترها واکنش زیادی می دهد و با افزایش نقاط، دقت، رشد ملموسی دارد.
- شعاع تاثیر تقریباً برابر با $1/5$ برابر فاصله متوسط گره ها جواب بهتری را در پی خواهد داشت.

مراجع

- [1] Gingold, R.A., Monaghan, J. J., Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. : Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Nov. 1977. vol. 181.
- [2] Monaghan, J.J., A turbulence model for Smoothed Particle Hydrodynamics. European Journal of Mechanics - B/Fluids, 2011. 30(4): p. 360-370.
- [3] L., L., A numerical approach to the testing of fusion process. Astronomical Journal, 1977.
- [4] Gingold, R.A., Monaghan, J.J., Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. Journal of Computational Physics, 1982. 46 : (۳) p. 429-453.
- [5] Breiokopf P., R.A., Savignat J.-M. , and Villon P., Integration constraint in diffuse element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004. 193, pp. 1203-1220.
- [6] Lu, Y.Y., T. Belytschko, and L. Gu, A new implementation of the element free Galerkin method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994. 113(3): p. 397-414.
- [7] Mu, L., Z.-h. He, and S.-k. Dong, Reproducing Kernel Particle Method for Radiative Heat Transfer in 1D Participating Media .Mathematical Problems in Engineering, 2015. 2015: p. 11.
- [8] Melenk, J.M. and I. Babuška, The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996. 139(1-4): p. 289-314.
- [9] Liszka, T.J., C.A.M. Duarte, and W.W. Tworzydło, hp-Meshless cloud method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996. 139(1-4): p. 263-288.
- [10] Atluri, S. and S. Shen, The basis of meshless domain discretization: the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method. Advances in Computational Mathematics, 2005. 23(1-2): p. 73-93.
- [11] Arzani, H., Afshar, M. H., Solving Poisson's equations by the Discrete Least Square meshless method. WIT Transaction on Modelling and Simulation, 2006.
- [12] Arzani, H., Afshar, M. H., Solution of spillways flow by discrete least square meshless methods. Proceeding of Second ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods, Porto, Portugal 2007.





- [13] Rahmani Firoozjaee, A., Afshar, M.H., Discrete least squares meshless method (DLSM) with sampling points for the solution of elliptic partial differential equations. *Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33 (1), pp. 83–92, 2009.
- [14] Rahmani Firoozjaee, A., Afshar, M.H., Discrete Least Squares Meshless (DLSM) method for simulation of steady state shallow water flows. *Scientia Iranica*, 2011. 18(4): p. 835-845.
- [15] Naisipour M., Afshar, M.H., Hassani, B., Rahmani Firoozjaee, A., Collocation Discrete Least Square (CDLS) Method for Elasticity Problems. *International Journal of civil Engineering*, 2009. 7.
- [16] Amani, M.A., Naisipour, M., Mixed discrete least squares meshless method for planar elasticity problems using regular and irregular nodal distributions. *Engineering analysis with boundary elements*. 2012. , Vol.36., pp. 894-902.
- [17] Faraji S., Afshar, M.H., Node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement in Mixed Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems. *Modares Mechanical Engineering*, 2014. Vol., 14 No. 3.
- [۱۸] ارزانی حامد، افشار محمدهادی، نجمایی محمد، روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته برای حل معادلات دیفرانسیل جابجائی - پخش. نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید ۱۳۸۶.

