



بررسی اثر شعاع انتگرال گیری در محاسبه ضریب تمرکز تنش با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته

احمد جامی سدهی^{۱*}، حامد قوهانی عرب^۲

۱- دانشجوی سازه گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ahmadjami_2015@yahoo.com

۲- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ghohani@eng.usb.ac.ir

چکیده

روش المان محدود توسعه یافته برپایه مفاهیم تقسیم بندی واحد، با استفاده از توابع غنی ساز و درجات آزادی اضافی، ترک را در داخل جسم شبیه سازی می کند، که برخلاف روش المان محدود نیاز به اصلاح شبکه بندی در اطراف ترک نمی باشد. در این مقاله روش المان محدود توسعه یافته با استفاده از تکنیک انتگرال اثر متقابل جهت ارزیابی مود اول ضریب تمرکز تنش مورد استفاده قرار گرفته است. از این روش جهت محاسبه ضریب تمرکز تنش صفحه دارای ترک لبه استفاده شده است و اثر شعاع انتگرال گیری در شبکه بندی های مختلف بر مقدار خطای محاسبه شده بررسی شده است. در این مدل سازی نتایج نشان می دهد، در صورتی که شعاع انتگرال گیری ۲ برابر اندازه المان انتخاب شود، نتایج حاصل از المان محدود توسعه یافته با مقادیر واقعی تطبیق خوبی خواهد داشت.

واژگان کلیدی: روش المان محدود توسعه یافته، مکانیک شکست، ضریب تمرکز تنش، انتگرال اثر متقابل





۱- مقدمه

پدیده شکست یکی از عمده‌ترین عواملی است که انسان از زمان ساخت ساده‌ترین ابزارها با آن مواجه بوده است. با توجه به اینکه هفتاد تا هشتاد درصد خرابی در سازه‌های مکانیکی ناشی از شکست در آنها می‌باشد، اهمیت بکارگیری علم مکانیک شکست در پاسخ به علت خرابی این سازه‌ها آشکار می‌گردد [۱]. ضریب تمرکز تنش مهمترین پارامتر مکانیک شکست می‌باشد، که وضعیت تنش در اطراف نوک ترک را ارزیابی می‌کند. در واقع ضریب تمرکز تنش تابع پیچیده‌ای از بار، شرایط مرزی، رشد ترک، هندسه و خواص مواد می‌باشد. ضریب تمرکز تنش به روشهای عددی و تحلیلی قابل محاسبه می‌باشد، از این روش‌های عددی متفاوتی برای محاسبه ضریب تمرکز تنش وجود دارد که می‌توان روش گالرکین، روش المان محدود و روش المان مرزی را نام برد [۲].

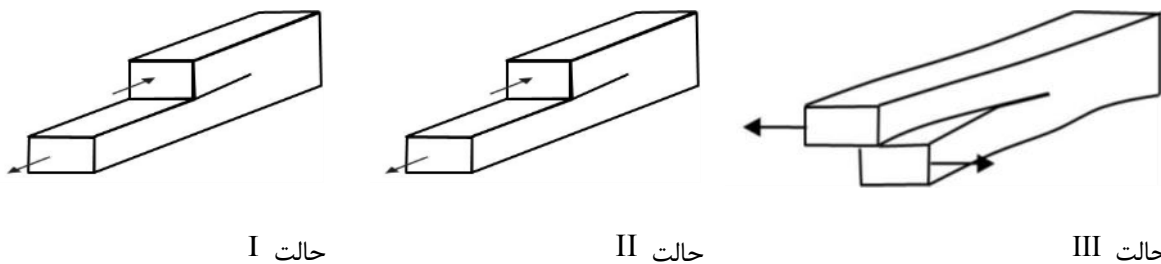
هر چند المان محدود یکی از قدرتمندترین روش‌های عددی در حل مسائل محیط پیوسته است، اما در حل مسائلی که در دامنه جابجایی یا کرنش آنها عدم پیوستگی وجود دارد، به منظور ایجاد تطابق توپولوژی با هندسه عدم پیوستگی نیاز به شبکه‌بندی مجدد وجود دارد که منجر به افزایش خطاها و هزینه‌ها می‌شود و از کارایی روش کاسته می‌شود [۳]. به منظور برطرف کردن این نقیصه روش المان محدود توسعه یافته ابداع گردید. این روش برای اولین بار توسط BELYTSCHKO و BLACK ارائه شد [۴]. آنها روشی بر پایه المان محدود برای مدل‌سازی رشد ترک با کمینه کردن شبکه بندی مجدد ارائه کردند که در مدل‌سازی‌های فراوانی مورد استفاده قرار گرفته است.

اخیرا روش المان محدود توسعه یافته در زمینه محاسبه ضریب تمرکز تنش توجه زیادی را متوجه خود کرده است، که بر این اساس تکنیک‌های متفاوتی برای ارزیابی ضریب تمرکز تنش در مسئله‌های مختلف توسط پژوهشگران مورد استفاده قرار گرفته است، که می‌توان روش برون‌یابی تغییر مکان، روش انتگرال مستقل از مسیر J انتگرال و انرژی گریفیت را اشاره کرد [۵]. انتگرال مستقل از مسیر J انتگرال بیشترین استفاده را در میان این روش‌ها دارا بوده، که روش انتگرال اثر متقابل، اصلاح شده این روش می‌باشد. در روش انتگرال اثر متقابل به منظور ارزیابی ضریب تمرکز تنش فرض می‌گردد یک میدان تنش و جابجایی اضافی به سیستم تحمیل شده است. با در نظر گرفتن ترکیب تنش‌ها و جابجایی‌های واقعی و در نظر گرفتن تعادل، در صورت معلوم بودن وضعیت تنش‌ها و جابجایی‌های اضافی، ارزیابی ضریب تمرکز تنش واقعی امکان پذیر خواهد بود. YAU et al روش انتگرال اثر متقابل را برای مواد همگن پیشنهاد کردند. همچنین YU et al ضریب تمرکز تنش را برای مواد II شکست در اجسام ۳ بعدی دارای ترک مورب با استفاده از انتگرال اثر متقابل محاسبه کرده‌اند.

۲- ضریب تمرکز تنش

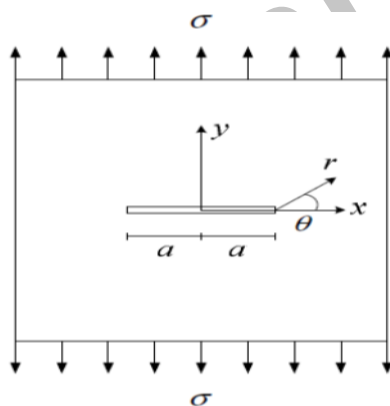
در مدل مکانیک شکست الاستیک خطی، تنش در نوک ترک به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. از این رو امکان بدست آوردن مقادیر صحیح تنش و جابجایی در اطراف نوک ترک میسر نمی‌باشد. بدین جهت برای آنالیز پایداری وضعیت ترک و پیش‌بینی گسیختگی، مفهوم ضریب تمرکز تنش توسط اروین ارائه گردید [۶]. ضرایب تمرکز تنش برای هر یک از حالات بارگذاری (شکل ۱) توسط معادله (۱) بدست می‌آیند.





شکل ۱. حالت I ناشی از بارگذاری کششی، حالت II ناشی از بارگذاری برشی در جسم، و حالت III نشان دهنده اثر بارگذاری پیچشی در جسم می باشد.

در معادله (۱)، r, θ نشان دهنده فاصله و زاویه نقطه مورد بررسی نسبت به نوک ترک می باشند که در شکل (۲) نشان داده شده است. σ_y و τ_{yx} و τ_{yz} به ترتیب نشان دهنده تنش محوری در جهت y و تنش برشی در صفحات $x-y$ و $y-z$ می باشند. K_I و K_{II} و K_{III} به ترتیب مشخص کننده ضرایب تمرکز تنش در حالات III و II و I می باشند.



شکل ۲. مختصات نقاط مجاور نوک ترک

۳- المان محدود توسعه یافته

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r \sigma_y}$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r \tau_{yx}}$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r \tau_{yz}}$$

(۱)

در این روش برای مدل سازی ترک برخلاف روش المان محدود نیازی به شبکه بندی منطبق بر مرز عدم پیوستگی نمی باشد،





بلکه با اعمال همزمان روش‌های تقسیم‌بندی المان و غنی‌سازی محلی میدان جابجایی در المان‌های واقع بر مرز ناپیوستگی امکان مدل‌سازی با استفاده از شبکه‌بندی واحد وجود دارد.

۳-۱- تقسیم‌بندی واحد

با تقسیم‌بندی یک المان که توسط ناپیوستگی به دو نیم شده است سعی می‌شود که جهت گیری ناپیوستگی مدل شود. می‌توان از نقاط گوسی هر یک از این تقسیم‌بندی‌ها برای انتگرال‌گیری بر روی هر یک از سطوح دو طرف ناپیوستگی استفاده نمود و بدین‌گونه از اضافه شدن درجات آزادی اضافه به سیستم جلوگیری کرد [۷].

۳-۲- غنی‌سازی محلی

توابع غنی‌سازی ناپیوسته به تقریب المان محدود اضافه می‌شوند و ترک به صورت دلخواه رشد می‌کند. وجود ترک در روش المان محدود توسعه یافته منجر به دو نوع غنی‌سازی مسیر ترک و غنی‌سازی نوک ترک در مسئله می‌گردد [۸]. مسیر ترک توسط تابع ناپیوسته هویساید اصلاح شده (معادله ۲) و نوک ترک توسط معادله (۳) غنی‌سازی می‌گردد.

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\{F_j(r, \theta)\}_{j=1,2,3,4} = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (3)$$

تقریب المان محدود توسعه یافته برای میدان جابجایی به صورت معادله (۵) تعریف می‌گردد.

$$U^h(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) u_i + \sum_{j \in J} N_j(x) H_j(x) a_j + \sum_{k \in K} N_k(x) F_1(x) b_k^I \quad (5)$$

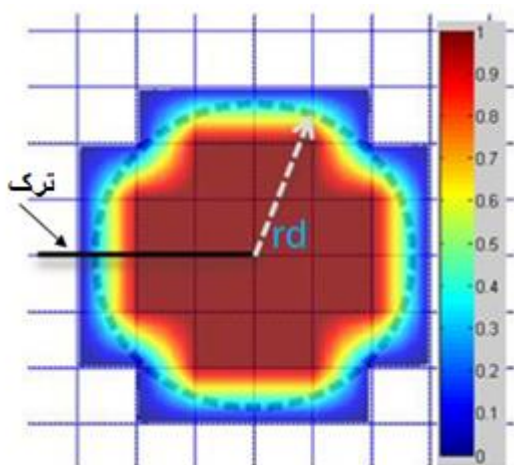
که در آن $H_j(x)$ تابع هویساید اصلاح شده، $F_1(x)$ توابع تغییر مکانی دو بعدی نزدیک نوک ترک، a_j و b_k^I درجات آزادی اضافه شده به گره‌ها برای غنی‌سازی مسیر و نوک ترک می‌باشد.

۴- انتگرال اثر متقابل

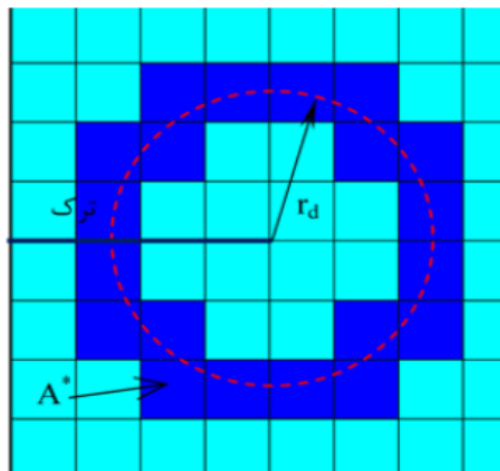
در روش انتگرال اثر متقابل به منظور ارزیابی ضریب تمرکز تنش فرض می‌گردد یک میدان تنش و جابجایی اضافی به سیستم تحمیل شده است. با در نظر گرفتن ترکیب تنش‌ها و جابجایی‌های واقعی و در نظر گرفتن تعادل، در صورت معلوم بودن وضعیت تنش‌ها و جابجایی‌های اضافی، ارزیابی ضریب تمرکز تنش واقعی امکان پذیر خواهد بود [۹].

مقدار انتگرال بر روی دایره ای به شعاع r_d محاسبه می‌شود مطابق شکل ۳ محاسبه می‌شود.





(ب)



(الف)

شکل ۳. (الف) تعیین سطح معادل. (ب) تغییرات تابع q

در این روش میدان مجازی به میدان‌های واقعی مسئله اضافه شده تا شرایط مرزی واقعی مسئله ارضا شود. حالت‌های واقعی و مجازی به ترتیب با بالا نویس ۱ و ۲ در معادلات معرفی می‌شوند. $I^{(1,2)}$ معرف انتگرال اثر متقابل بوده و به صورت معادله ۶ معرفی می‌شود.

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^1}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} da \quad (۶)$$

که در آن q تابع وزنی است که برای گره‌هایی که بر روی دایره یا خارج از آن قرار می‌گیرند برابر صفر و برای گره‌هایی که درون دایره قرار می‌گیرند برابر یک در نظر گرفته می‌شوند. تنها المان‌هایی در انتگرال گیری وارد خواهند شد که مقدار تابع q در آنها تغییر کند. بنابراین تنها المان‌هایی که توسط دایره مذکور قطع گردیده‌اند در انتگرال لحاظ می‌شوند. $W^{(1,2)}$ انرژی کرنشی اندرکنشی است و توسط معادله ۷ محاسبه می‌شود.

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^2 = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^1 \quad (۷)$$

در معادله ۷ ارتباط ضریب تمرکز تنش و انتگرال اثر متقابل به صورت ذیل محاسبه می‌شود.





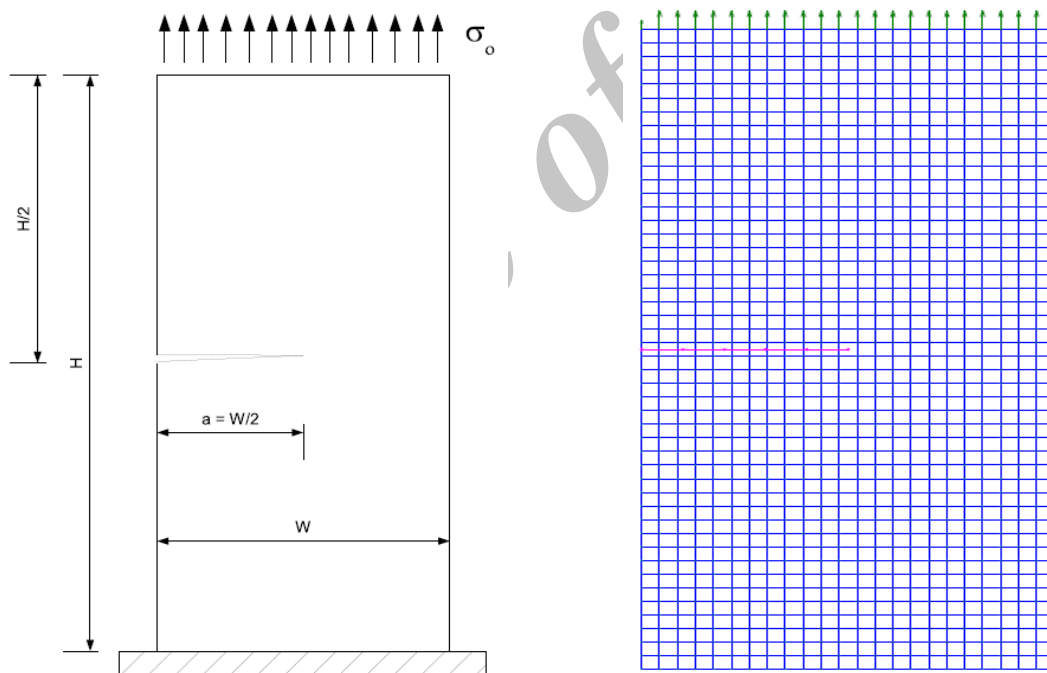
$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E'} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (8)$$

با انتخاب شرایط مرزی مناسب برای حالت مجازی (حالت ۲) به صورت $K_{II}^{(2)} = 0$ و $K_I^{(1)} = 1$ ضریب شدت تنش مود I توسط معادله ۹ محاسبه می‌شود.

$$K_I^{(1)} = \frac{E'}{2} I^{(1, \text{model})} \quad (9)$$

۵- صفحه دارای ترک مرکزی لبه تحت کشش یکنواخت

در این مثال یک صفحه با ابعاد $L=2$ و $W=1$ مورد بررسی قرار گرفته است. یک ترک با طول $a=W/2$ در لبه صفحه قرار داده شده است. هندسه صفحه و ترک در شکل ۴ نشان داده شده است.



(ب) صفحه دارای ترک لبه

(الف) مدل عددی

شکل ۴. مدل عددی و هندسه صفحه دارای ترک لبه

در این مثال مود I شکست مورد بررسی قرار گرفته است. ضریب تمرکز تنش KI با روش المان محدود توسعه یافته محاسبه شده، و با مقدار دقیق آن مقایسه گردیده است. ضریب تمرکز تنش برای یک صفحه تحت کشش یکنواخت با ترک در لبه طبق معادله ۱۰ بدست می‌آید [۲].



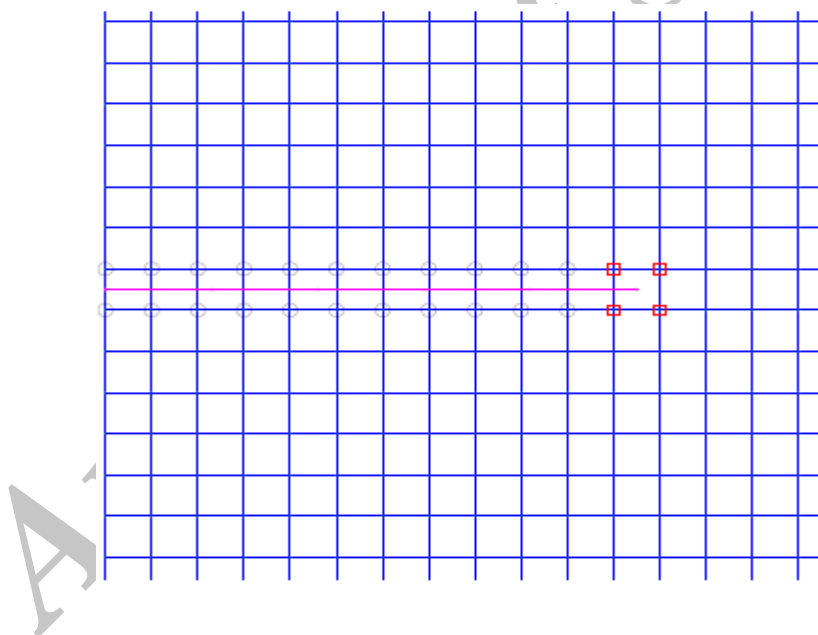


$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{W}\right) \quad (10)$$

در این رابطه a طول ترک، σ تنش وارده به صفحه، W عرض صفحه و F پارامتری بدون بعد که تابع هندسی یا ضریب تصحیح نامیده می‌شود و بر طبق معادله ۱۱ محاسبه می‌شود.

$$F\left(\frac{a}{W}\right) = \sqrt{\frac{2W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2W}} \quad (11)$$

تحلیل مسئله به همراه یک شبکه‌بندی یکنواخت با المان‌های مستطیلی با فرض کرنش صفحه‌ای با $E=100\text{Gpa}$ و $\nu = 0.3$ انجام شده است. توابع غنی‌سازی برای المان‌های نوک ترک و المان‌هایی که به دو نیم شده‌اند، به کار رفته است (شکل ۵). در المان‌های پیوسته که ترک از آن عبور نکرده است، روش انتگرال‌گیری عددی استاندارد گوس، و برای المان‌های دارای ترک از روش انتگرال دوزنقه‌ای استفاده شده است.



شکل ۵. گره‌های غنی‌سازی در اطراف ترک. گره‌های مربعی غنی‌سازی نوک ترک و گره‌های دایره‌ای غنی‌سازی عدم پیوستگی را دارا می‌باشند.

در این آنالیز از ۳ شبکه‌بندی مختلف استفاده شده است. شبکه‌بندی ۱ دارای 12×24 گره، شبکه‌بندی ۲ دارای 24×24 گره و شبکه‌بندی ۳ دارای 30×60 گره در فضای صفحه می‌باشد. به‌علاوه برای بررسی تاثیر ناحیه انتگرال‌گیری به روش انتگرال اثر متقابل در حل عددی مسئله، ۵ شعاع انتگرال‌گیری مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. r_d شعاع انتگرال‌گیری است که تابعی از اندازه المان (l_e) شبکه‌بندی می‌باشد.





مقدار خطا در محاسبه ضریب تمرکز تنش طبق معادله ۱۲ محاسبه می‌شود.

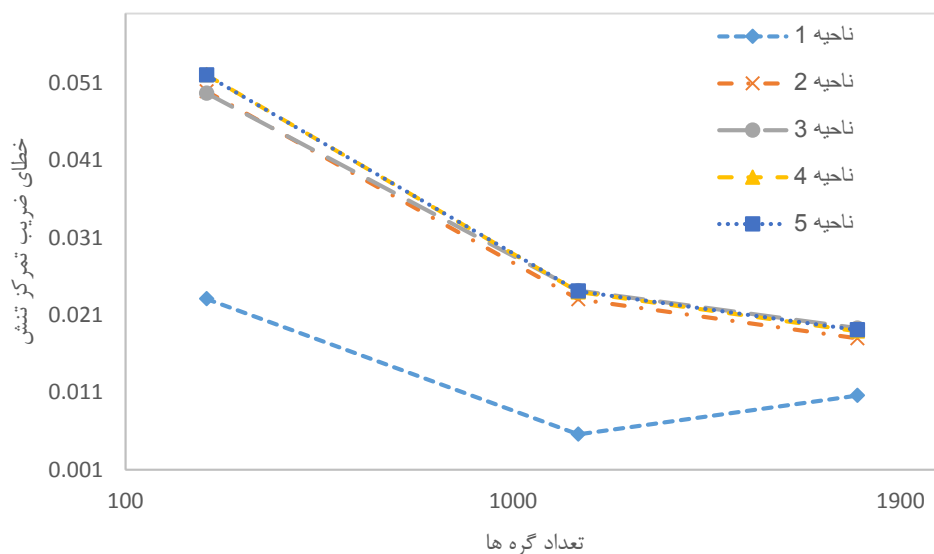
$$\text{ERROR} = \frac{K_{\text{numerical}} - K_{\text{exact}}}{K_{\text{exact}}} \quad (12)$$

که در جدول ۱ نتایج حاصل از این آنالیز نشان داده شده است.

جدول ۱. مقدار خطای ضریب تمرکز تنش

ناحیه ۵	ناحیه ۴	ناحیه ۳	ناحیه ۲	ناحیه ۱	
۰,۰۵۲۰۵۰	۰,۰۵۲۰۸۰	۰,۰۴۹۷۰۰	۰,۰۴۹۹۴۷	۰,۰۲۳۱۱۲	شبکه بندی ۱
۰,۰۲۴۰۹۸	۰,۰۲۳۹۹۰	۰,۰۲۴۱۶۹	۰,۰۲۳۰۴۰	۰,۰۰۵۶۰۰	شبکه بندی ۲
۰,۰۱۹۰۹۰	۰,۰۱۲۹۱۹۷	۰,۰۱۹۳۱۰	۰,۰۱۷۹۹۸	۰,۰۱۰۶۰۴	شبکه بندی ۳

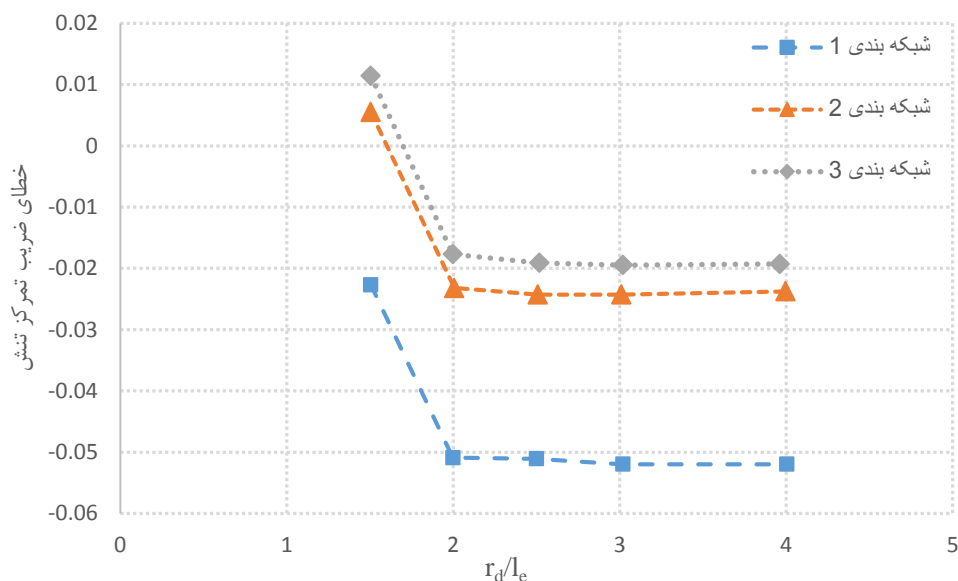
در نمودار ۱، همگرایی مسئله با نواحی مختلف انتگرال گیری نشان داده شده است. همانطور که در نمودار ۱ نشان داده شده است، خطای ارزیابی ضریب تمرکز تنش با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته مقدار ناچیزی می‌باشد حتی اگر شبکه بندی مورد استفاده بزرگ باشد. بعلاوه، نمودار همگرایی ناحیه ۱ به علت نزدیک بودن زیاد به نوک ترک و تغییرات شدید در اطراف نوک ترک دارای رفتار همگرایی مناسبی نمی‌باشد. به هر حال برای دیگر ناحیه‌ها به دلیل دور بودن نسبی از نوک ترک، همگرایی رفتار خوبی را نشان می‌دهد.





نمودار ۱. همگرایی مسئله با ترک لبه

در این مسئله ترک به صورت دلخواه در شبکه بندی قرار گرفته است و هیچگونه اصلاحی در شبکه بندی در اطراف نوک ترک صورت نگرفته است، که به هر حال تقریب بسیار خوبی از مقدار واقعی را نشان داده است، که می توان در نمودار ۲ مشاهده کرد.



نمودار ۲. تاثیر نسبت شعاع انتگرال گیری بر اندازه المان روی خطای محاسبه شده

همچنین نمودار ۲، نتایج نمودار ۱ را تایید می کند. نمودار ۲ خطای ضریب تمرکز تنش مود ۱ شکست را بر حسب ناحیه انتگرال گیری که نسبت شعاع انتگرال گیری بر اندازه المان می باشد، نشان می دهد. از نمودار ۲ می توان مشاهده کرد که با دور شدن از نوک ترک تقریباً به اندازه $r_d > 2$ همگرایی خوبی در نتایج حاصل می شود. به طوریکه برای $r_d < 2$ مقدار خطای محاسباتی زیاد بوده و نتایج همگرایی خوبی را دارا نیست. لازم به ذکر است در صورتی که اندازه المان ها بزرگ باشد در نظر گرفتن مقدار زیاد برای r_d با توجه به اینکه مقادیر میدان تنش و جابجایی اضافی محاسبه شده دقیق نخواهد بود، منجر به خطای محاسبات می گردد.

۵- نتیجه گیری

انتخاب مقدار r_d (شعاع دایره تعیین ناحیه سطح معادل برای محاسبه انتگرال اثر متقابل) بزرگتر از ۲ برابر اندازه المان، برای المان های مجاور ترک، در صورت استفاده از روش انتگرال اثر متقابل، منجر به محاسبه دقیق مقدار ضریب تمرکز تنش می گردد، در حالیکه انتخاب مقادیر کوچکتر باعث تولید خطای قابل ملاحظه در محاسبات می گردد. همچنین انتخاب مقدار بزرگ برای r_d نیز به واسطه محاسبه اشتباه مقادیر تنش و جابجایی اضافی، باعث افزایش خطای محاسبات می گردد.





مراجع

- [1] Westergaard, H., " *Bearing Pressures and Cra; c];< si*. Journal of applied mechanics, 1939. **18**.
- [2] Tada, H., P.C. Paris, and G.R. Irwin, " *The stress analysis of cracks*". Handbook, Del Research Corporation, 1973.
- [3] Dolbow, J., N. Moës, and T. Belytschko, " *Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method*". Finite elements in analysis and design, 2000. **36**(3): p. 235-260.
- [4] Belytschko, T. and T. Black, " *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*". International journal for numerical methods in engineering, 1999. **45**(5): p. 601-620..
- [5] Rice, J.R. " *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*". 1968. ASME.
- [6] Irwin, G.R., " *Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys*". 1956, NAVAL RESEARCH LAB WASHINGTON DC.
- [7] Melenk, J.M. and I. Babuška, " *The partition of unity finite element method: basic theory and applications*". Computer methods in applied mechanics and engineering, 1996. **139**(1-4): p .
۳۱۴-۲۸۹
- [8] Mohammadi, S., " *Extended finite element method: for fracture analysis of structures*". 2008: John Wiley & Sons.

۹. قوهانی عرب، ح.ق.، "طراحی بهینه محیط پیوسته براساس قابلیت اعتماد با توجه به رشد ترک به کمک تحلیل به روش المان محدود توسعه یافته". گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان ۱۳۹۲.

