



بررسی تاثیر اندازه المان و تعداد نقاط انتگرال گیری بر محاسبه ضریب تمرکز تنش با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته

احمد جامی سدهی^{۱*}، حامد قوهانی عرب^۲

۱- دانشجوی سازه گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ahmadjami_2015@yahoo.com

۲- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ghohani@eng.usb.ac.ir

چکیده

یکی از مهمترین مسائل مطرح در مکانیک جامدات، شکست و گسترش ترک می باشد. با پیشرفت روزافزون علم مکانیک شکست تحقیقات فراوانی در مورد پدیده شکست در اجسام، توسط روش های نوین عددی صورت گرفته است. روش المان محدود توسعه یافته برپایه مفاهیم تقسیم بندی واحد، با استفاده از توابع غنی ساز و درجات آزادی اضافی، ترک را در داخل جسم شبیه سازی می کند، که برخلاف روش المان محدود نیاز به اصلاح شبکه بندی در اطراف ترک نمی باشد. در این مقاله روش المان محدود توسعه یافته با استفاده از تکنیک انتگرال اثر متقابل جهت ارزیابی مود اول و مود دوم ضریب تمرکز تنش مورد استفاده قرار گرفته است. از این روش جهت محاسبه ضریب تمرکز تنش صفحه دارای ترک لبه استفاده شده است. نتایج حاکی از این است، در صورت استفاده از روش زیر المان و استفاده از یک شبکه 5×5 انتگرال گیری در هر زیر المان منتج به خطای کمتر از ۱٪ در میانگین خطای ماتریس سختی می گردد. با توجه به بررسی های به عمل آمده مشخص گردید در هنگام محاسبه ضریب تمرکز تنش، نقش اندازه المان ها در مدل اجزای محدود از خطای به وجود آمده در ماتریس سختی پررنگ تر است.

واژگان کلیدی: روش المان محدود توسعه یافته، مکانیک شکست، ضریب تمرکز تنش، انتگرال اثر متقابل





۱- مقدمه

پدیده شکست یکی از عمده ترین عواملی است که انسان از زمان ساخت ساده ترین ابزارها با آن مواجه بوده است. با توجه به اینکه هفتاد تا هشتاد درصد خرابی در سازه های مکانیکی ناشی از شکست در آنها می باشد، اهمیت بکارگیری علم مکانیک شکست در پاسخ به علت خرابی این سازه ها آشکار می گردد [۱]. ضریب تمرکز تنش مهمترین پارامتر مکانیک شکست می باشد، که وضعیت تنش در اطراف نوک ترک را ارزیابی می کند. در واقع ضریب تمرکز تنش تابع پیچیده ای از بار، شرایط مرزی، رشد ترک، هندسه و خواص مواد می باشد. ضریب تمرکز تنش به روش های عددی و تحلیلی قابل محاسبه می باشد، از این رو روش های عددی متفاوتی برای محاسبه ضریب تمرکز تنش وجود دارد که می توان روش گالرکین، روش المان محدود و روش المان مرزی را نام برد [۲].

هر چند المان محدود یکی از قدرتمندترین روش های عددی در حل مسائل محیط پیوسته است، اما در حل مسائلی که در دامنه جابجایی یا کرنش آنها عدم پیوستگی وجود دارد، به منظور ایجاد تطابق توپولوژی با هندسه عدم پیوستگی نیاز به شبکه بندی مجدد وجود دارد که منجر به افزایش خطاها و هزینه ها می شود و از کارایی روش کاسته می شود [۳]. به منظور برطرف کردن این نقیصه روش المان محدود توسعه یافته ابداع گردید. این روش برای اولین بار توسط BELYTSCHKO و BLACK ارائه شد [۴]. آنها روشی بر پایه المان محدود برای مدل سازی رشد ترک با کمینه کردن شبکه بندی مجدد ارائه کردند که در مدل سازی های فراوانی مورد استفاده قرار گرفته است.

اخیرا روش المان محدود توسعه یافته در زمینه محاسبه ضریب تمرکز تنش توجه زیادی را متوجه خود کرده است، که بر این اساس تکنیک های متفاوتی برای ارزیابی ضریب تمرکز تنش در مسئله های مختلف توسط پژوهشگران مورد استفاده قرار گرفته است، که می توان روش برون یابی تغییر مکان، روش انتگرال مستقل از مسیر J انتگرال و انرژی گریفت را اشاره کرد [۵]. انتگرال مستقل از مسیر J انتگرال بیشترین استفاده را در میان این روش ها دارا بوده، که روش انتگرال اثر متقابل، اصلاح شده این روش می باشد. در روش انتگرال اثر متقابل به منظور ارزیابی ضریب تمرکز تنش فرض می گردد یک میدان تنش و جابجایی اضافی به سیستم تحمیل شده است. با در نظر گرفتن ترکیب تنش ها و جابجایی های واقعی و در نظر گرفتن تعادل، در صورت معلوم بودن وضعیت تنش ها و جابجایی های اضافی، ارزیابی ضریب تمرکز تنش واقعی امکان پذیر خواهد بود. YAU et al روش انتگرال اثر متقابل را برای مواد همگن پیشنهاد کردند. همچنین YU et al ضریب تمرکز تنش را برای مواد II شکست در اجسام ۳ بعدی دارای ترک مورب با استفاده از انتگرال اثر متقابل محاسبه کرده اند.

۲- المان محدود توسعه یافته

در این روش برای مدل سازی ترک برخلاف روش المان محدود نیازی به شبکه بندی منطبق بر مرز عدم پیوستگی نمی باشد، بلکه با اعمال همزمان روش های تقسیم بندی المان و غنی سازی محلی میدان جابجایی در المان های واقع بر مرز ناپیوستگی امکان مدل سازی با استفاده از شبکه بندی واحد وجود دارد.





۲-۱- تقسیم‌بندی واحد

با تقسیم‌بندی یک المان که توسط ناپیوستگی به دو نیم شده است سعی می‌شود که جهت گیری ناپیوستگی مدل شود. می‌توان از نقاط گوسی هر یک از این تقسیم‌بندی‌ها برای انتگرال‌گیری بر روی هر یک از سطوح دو طرف ناپیوستگی استفاده نمود و بدین‌گونه از اضافه شدن درجات آزادی اضافه به سیستم جلوگیری کرد [۶].

۲-۲- غنی‌سازی محلی

توابع غنی‌سازی ناپیوسته به تقریب المان محدود اضافه می‌شوند و ترک به صورت دلخواه رشد می‌کند. وجود ترک در روش المان محدود توسعه یافته منجر به دو نوع غنی‌سازی مسیر ترک و غنی‌سازی نوک ترک در مسئله می‌گردد [۷]. مسیر ترک توسط تابع ناپیوسته هویساید اصلاح شده (معادله ۲) و نوک ترک توسط معادله (۳) غنی‌سازی می‌گردد.

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\{F_j(r, \theta)\}_{j=1,2,3,4} = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (3)$$

تقریب المان محدود توسعه یافته برای میدان جابجایی به صورت معادله (۵) تعریف می‌گردد.

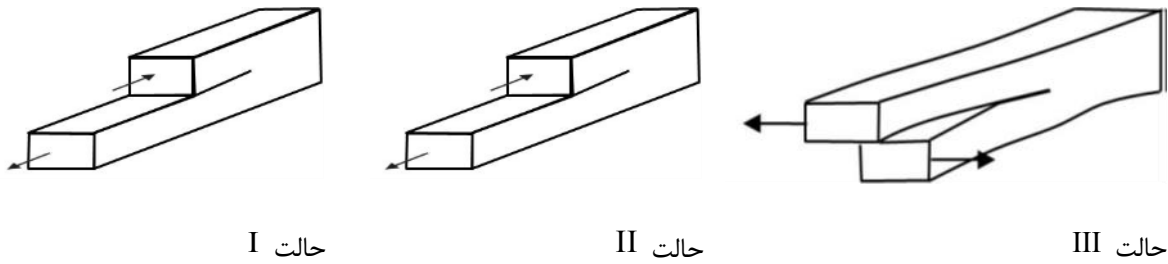
$$U^h(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) u_i + \sum_{j \in J} N_j(x) H_j(x) a_j + \sum_{k \in K} N_k(x) F_1(x) b_k^I \quad (5)$$

که در آن $H_j(x)$ تابع هویساید اصلاح شده، $F_1(x)$ توابع تغییر مکانی دو بعدی نزدیک نوک ترک، a_j و b_k^I درجات آزادی اضافه شده به گره‌ها برای غنی‌سازی مسیر و نوک ترک می‌باشد.

۳- ضریب تمرکز تنش

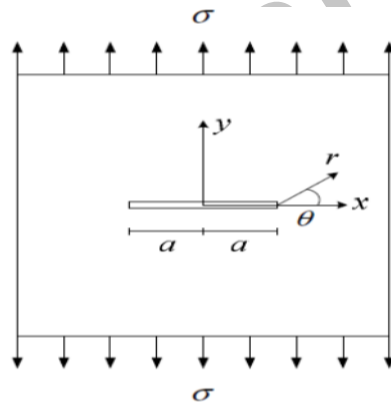
در مدل مکانیک شکست الاستیک خطی، تنش در نوک ترک به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. از این‌رو امکان بدست آوردن مقادیر صحیح تنش و جابجایی در اطراف نوک ترک میسر نمی‌باشد. بدین جهت برای آنالیز پایداری وضعیت ترک و پیش‌بینی گسیختگی، مفهوم ضریب تمرکز تنش توسط اروین ارائه گردید [۸]. ضرایب تمرکز تنش برای هر یک از حالات بارگذاری (شکل ۱) توسط معادله (۱) بدست می‌آیند.





شکل ۱. حالت I ناشی از بارگذاری کششی، حالت II ناشی از بارگذاری برشی در جسم، و حالت III نشان دهنده اثر بارگذاری پیچشی در جسم می باشد.

در معادله (۱)، r, θ نشان دهنده فاصله و زاویه نقطه مورد بررسی نسبت به نوک ترک می باشند که در شکل (۲) نشان داده شده است. σ_y و τ_{yx} و τ_{yz} به ترتیب نشان دهنده تنش محوری در جهت y و تنش برشی در صفحات $X-Y$ و $Y-Z$ می باشند. K_I و K_{II} و K_{III} به ترتیب مشخص کننده ضرایب تمرکز تنش در حالات III و II و I می باشند.



شکل ۲. مختصات نقاط مجاور نوک ترک

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r \sigma_y}$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r \tau_{yx}}$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r \tau_{yz}}$$

(۱)

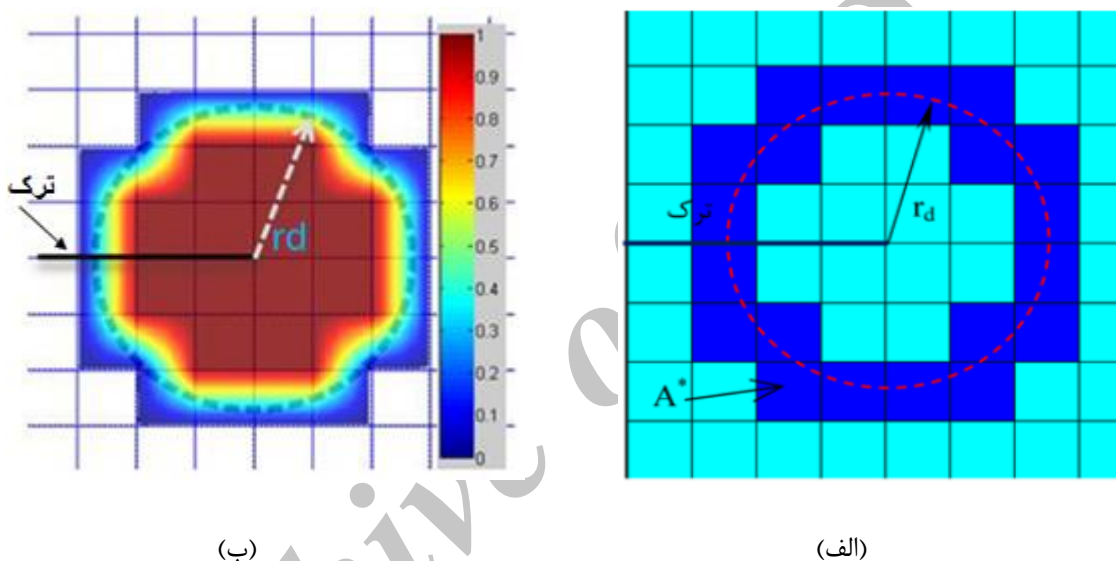




۴-انتگرال اثر متقابل

در روش انتگرال اثر متقابل به منظور ارزیابی ضریب تمرکز تنش فرض می‌گردد یک میدان تنش و جابجایی اضافی به سیستم تحمیل شده است. با در نظر گرفتن ترکیب تنش‌ها و جابجایی‌های واقعی و در نظر گرفتن تعادل، در صورت معلوم بودن وضعیت تنشها و جابجایی‌های اضافی، ارزیابی ضریب تمرکز تنش واقعی امکان پذیر خواهد بود [۹].

مقدار انتگرال بر روی دایره ای به شعاع r_d محاسبه می‌شود مطابق شکل ۳ محاسبه می‌شود.



شکل ۳. (الف) تعیین سطح معادل. (ب) تغییرات تابع q

در این روش میدان مجازی به میدان‌های واقعی مسئله اضافه شده تا شرایط مرزی واقعی مسئله ارضا شود. حالت‌های واقعی و مجازی به ترتیب با بالا نویسی ۱ و ۲ در معادلات معرفی می‌شوند. $I^{(1,2)}$ معرف انتگرال اثر متقابل بوده و به صورت معادله ۶ معرفی می‌شود.

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^1}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} da \quad (6)$$

که در آن q تابع وزنی است که برای گره‌هایی که بر روی دایره یا خارج از آن قرار می‌گیرند برابر صفر و برای گره‌هایی که درون دایره قرار می‌گیرند برابر یک در نظر گرفته میشوند. تنها المان‌هایی در انتگرال گیری وارد خواهند شد که مقدار تابع q در آنها تغییر کند. بنابراین تنها المان‌هایی که توسط دایره مذکور قطع گردیده‌اند در انتگرال لحاظ می‌شوند. $W^{(1,2)}$ انرژی



کرنشی اندرکنشی است و توسط معادله ۷ محاسبه می‌شود.

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^2 = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^1 \quad (7)$$

در معادله ۷ ارتباط ضریب تمرکز تنش و انتگرال اثر متقابل به صورت ذیل محاسبه می‌شود.

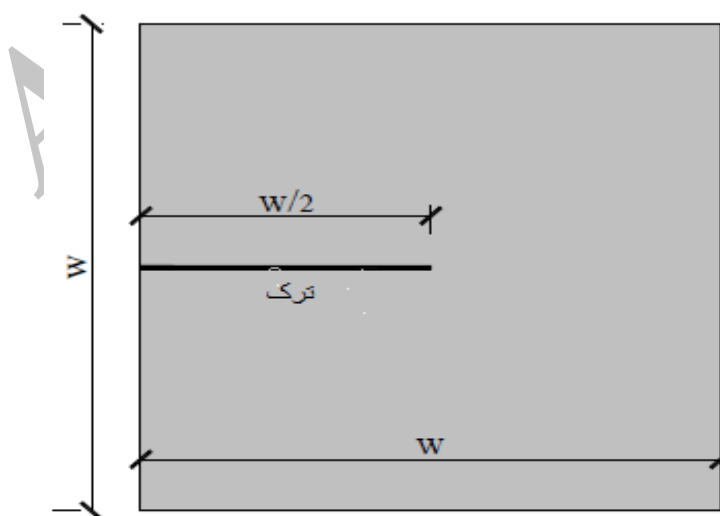
$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E'} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (8)$$

با انتخاب شرایط مرزی مناسب برای حالت مجازی (حالت ۲) به صورت $K_I^{(1)} = 1$ و $K_{II}^{(2)} = 0$ ضریب شدت تنش مود I توسط معادله ۹ محاسبه می‌شود.

$$K_I^{(1)} = \frac{E'}{2} I^{(1, \text{model})} \quad (9)$$

۵- تاثیر تعداد نقاط انتگرال گیری بر محاسبه ضریب تمرکز تنش

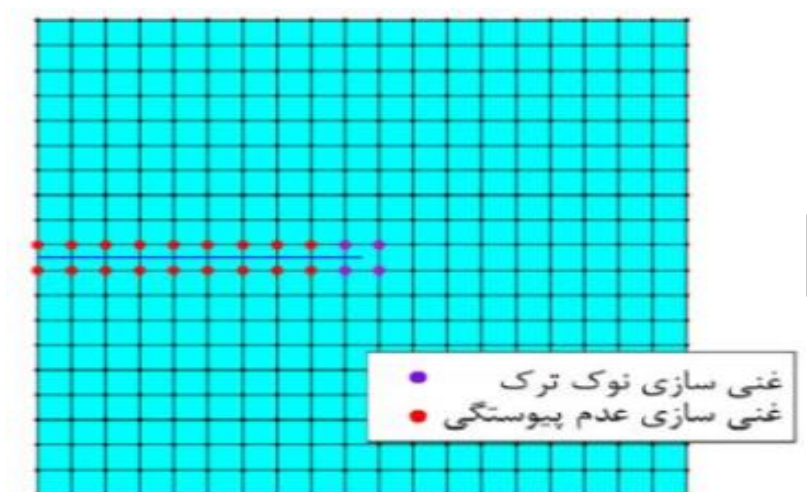
از آنجا که در محاسبات مربوط به سازه‌های ترک خورده، یکی از مهمترین اهداف، محاسبه ضریب تمرکز تنش به عنوان معیار پایداری یا انتشار ترک است، در این بخش تاثیر خطای ناشی از انتگرال گیری بر پاسخ به دست آمده برای ضریب تمرکز تنش مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور تعیین ضریب تمرکز تنش در یک صفحه مربعی مطابق شکل ۴ دارای ترکی به طول نصف صفحه می‌باشد، مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۴. صفحه دارای ترک لبه



به منظور تحلیل صفحه ذکر شده با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته، عرض ورق مورد نظر ۲ انتخاب گردیده است. به منظور تولید مدل از یک شبکه ۱۹×۱۹ استفاده شده و کلیه گره‌های محیطی صفحه به عنوان تکیه‌گاه‌هایی با تغییر مکان مشخص، مدل شده‌اند. شبکه استفاده شده در تحلیل و گره‌های غنی شده در شکل ۵ نمایش داده شده‌اند.



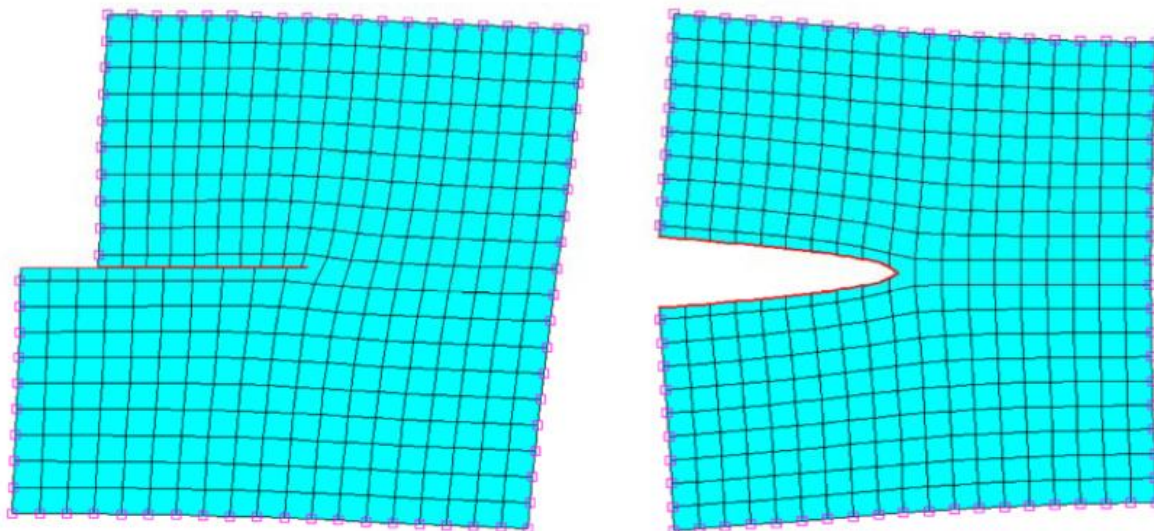
شکل ۵. مدل به کار رفته برای تحلیل ورق دارای ترک لبه

به منظور بررسی خطا، میدان جابجایی متناظر با حالات $(K_{II} = 0 \text{ و } K_I = 1)$ و $(K_{II} = 1 \text{ و } K_I = 0)$ به طور مجزا برای نقاط تکیه‌گاهی با توجه به معادله ۱۰ که نشان دهنده مقادیر واقعی تغییر مکان در نقاط نزدیک به ترک برای ضریب تمرکز تنش دلخواه است محاسبه گشته و سپس با در نظر گرفتن این مقادیر به عنوان شرایط مرزی، مساله با روش المان محدود توسعه یافته تحلیل گشته است. حالت تغییر شکل یافته صفحه برای هر یک از حالات بررسی در شکل نمایش داده شده است.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2)(\kappa - \cos\theta) \\ \sin(\theta/2)(\kappa - \cos\theta) \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin(\theta/2)(2 + \kappa + \cos\theta) \\ \cos(\theta/2)(2 - \kappa - \cos\theta) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

در معادله ۱۰، u و v به ترتیب نشان دهنده تغییر مکان در جهت x و y می‌باشند. μ ، مدول الاستیسیته برشی ماده است و κ ثابت Kolosove است که با توجه به مقدار نسبت پواسون ماده برای حالت تنش صفحه‌ای توسط رابطه $(1 + v)(3 - v)$ و برای حالت کرنش صفحه‌ای توسط رابطه $(3 - 4v)$ محاسبه می‌گردد.



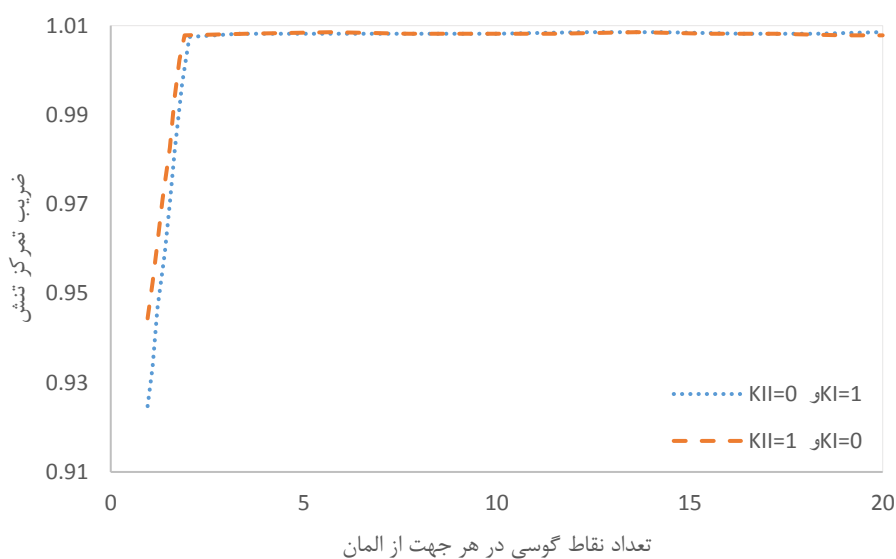


(ب)

(الف)

شکل ۶. فرم تغییر شکل یافته صفحه. (الف) $K_I = 1$ و $K_{II} = 0$. (ب) $K_I = 0$ و $K_{II} = 1$

به منظور بررسی خطای ناشی از انتگرال گیری عددی ماتریس سختی بر ضریب تمرکز تنش محاسبه شده، تعداد نقاط مربوط به شبکه انتگرال گیری در هر زیر المان از 1×1 تا 20×20 تغییر داده شده اند و مقدار ضریب تمرکز تنش با استفاده از روش انتگرال اثر متقابل برای هر حالت به طور جداگانه محاسبه گردیده است. مقادیر محاسبه شده برای ضریب تمرکز تنش در نمودار نشان داده شده اند.



نمودار ۱. تاثیر تعداد نقاط نمونه گیری در انتگرال گیری بر ضریب تمرکز تنش محاسبه شده





با توجه به نمودار ۱ مشخص می‌گردد، افزایش نقاط انتگرال‌گیری به بیش از شبکه ۵×۵ در هر زیر المان، در نتیجه کلی محاسبات تاثیر چندانی ندارد، و با انتخاب شبکه ۵×۵ جواب تحلیلی با جواب حقیقی تطبیق خوبی خواهد داشت و خطای بوجود آمده را کم می‌کند.

۶ - تاثیر اندازه المان بر دقت محاسبه ضریب تمرکز تنش

به منظور بررسی تاثیر اندازه المان بر دقت محاسبه ضریب تمرکز تنش، مساله با شبکه‌بندی منظم با تعداد المان‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه بین ضریب تمرکز تنش محاسبه شده با مقدار واقعی برای هر دو حالت بررسی مساله در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند.

در تحلیل‌های انجام شده برای بررسی تاثیر اندازه المان، به منظور محاسبه ماتریس سختی المان، از انتگرال‌گیری با در نظر گرفتن شبکه نمونه‌گیری ۵×۵ برای هر زیر المان استفاده شده است، باقی مشخصات مسئله مشابه مورد بررسی قبل می‌باشد.

جدول ۱. تاثیر اندازه المان بر خطای ضریب تمرکز تنش محاسبه شده

تعداد المان‌های شبکه	$K_I / K_{I(exact)}$	$K_{II} / K_{II(exact)}$
۵×۵	۰/۵۳۶۸	۰/۵۴۲۸
۹×۹	۱/۰۱۷۴	۱/۰۱۴۳
۱۵×۱۵	۱/۰۱۱۲	۱/۰۱۰۰
۱۹×۱۹	۱/۰۰۱۹	۱/۰۰۸۲
۲۵×۲۵	۱/۰۰۷۱	۱/۰۰۶۶
۲۹×۲۹	۱/۰۰۶۳	۱/۰۰۵۸
۳۵×۳۵	۱/۰۰۵۳	۱/۰۰۴۹

با توجه به مندرجات جدول ۱، نقش اندازه المان در خطای محاسبات کاملاً مشهود است. به گونه‌ای که تاثیر این عامل در خطای به وجود آمده در محاسبات بسیار بیشتر از نقش تعداد نقاط نمونه‌گیری در انتگرال‌گیری است.





۷- نتیجه گیری

- در روش المان محدود توسعه یافته، برای المان‌هایی که غنی‌سازی در آنها صورت گرفته است، استفاده از روش زیر المان و استفاده از یک شبکه 5×5 انتگرال‌گیری در هر زیر المان منتج به خطای کمتر از ۱٪ در میانگین خطای ماتریس سختی می‌گردد. در این المان‌ها به دلیل غیرخطی شدن شدید توابع شکل جدید گره‌ها پس از غنی‌سازی امکان دستیابی به مقدار دقیق وجود ندارد.

- با توجه به بررسی‌های به عمل آمده مشخص گردید در هنگام محاسبه ضریب تمرکز تنش، نقش اندازه المان‌ها در مدل اجزای محدود از خطای به وجود آمده در ماتریس سختی پررنگ تر است. به گونه‌ای که حتی خطای میانگین بیش از ۱٪ در ماتریس سختی نیز اثر چندانی روی نتیجه محاسبات ندارد و دقت محاسبات تنها تحت تاثیر اندازه المان‌ها می‌باشد.

مراجع

- [1] Westergaard, H., "*Bearing Pressures and Cra; c]; < si*. Journal of applied mechanics, 1939. **18**.
- [2] Tada, H., P.C. Paris, and G.R. Irwin, "*The stress analysis of cracks*. Handbook, Del Research Corporation", 1973.
- [3] Dolbow, J., N. Moës, and T. Belytschko, "*Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method*". Finite elements in analysis and design, 2000. **36**(3): p. 235-260.
- [4] Belytschko, T. and T. Black, "*Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*". International journal for numerical methods in engineering, 1999. **45**(5): p. 601-620.
- [5] Rice, J.R. "*A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*". 1968. ASME.
- [6] Melenk, J.M. and I. Babuška, "*The partition of unity finite element method: basic theory and application*"s. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1996. **139**(1-4): p. 289-314.
- [7] Mohammadi, S., "*Extended finite element method: for fracture analysis of structures*". 2008: John Wiley & Sons.
- [8] Irwin, G.R., "*Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys*." 1956, NAVAL RESEARCH LAB WASHINGTON DC.
- [9] قوهانی عرب، حامد. "طراحی بهینه محیط پیوسته بر اساس قابلیت اعتماد با توجه به رشد ترک به کمک تحلیل به روش المان محدود توسعه یافته". گروه مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان ۱۳۹۲.

