



مقایسه روش‌های مختلف گلرکین در تحلیل تنش دیسک FGM دوار تحت بارهای مکانیکی و حرارتی در حالت‌های مختلف

مهرداد صفری¹، بهروز شهریاری²

کارشناسی ارشد هوافضا، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان

Mehrdad.safari23@yahoo.com

دکتری هوافضا، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان

shahriari@mut-es.ac.ir

چکیده

دیسک‌های دوار کاربرد زیادی در صنایع مختلف از قبیل هوافضا، خودروسازی، نیروگاه‌ها و دریا دارند. این دیسک‌ها تحت بارهای مکانیکی و حرارتی قرار دارند. در این تحقیق به سه روش مختلف از روشهای گلرکین به محاسبه مقادیر جابه‌جایی و تنش‌ها و کرنش‌های یک دیسک دوار از جنس مواد مدرج تابعی (FGM) پرداخته شده است. این سه روش به نام گلرکین با دو تابع شکل یا خطی، گلرکین لاگرانژ و هرمیتی می‌باشند. خواص دیسک تحت تابعی مشخص با شعاع تغییر می‌کنند. شرایط بارگذاری به صورت مکانیکی گریز از مرکز ناشی از دوران خود دیسک و تنش حرارتی ناشی از اختلاف دما می‌باشد. که در این مقاله به مقایسه سه روش پر کاربرد از گلرکین در حل مساله پرداخته است و مزایا و معایب آن‌ها بیان شده است. با توجه به نتایج المان گیری هرمیتی به دلیل استفاده از چهار تابع شکل که دوتای آن روی مشتق جابه‌جایی به شعاع تعریف می‌شود پیوستگی و دقت بالاتری نسبت به دو روش دیگر دارد.

کلمات کلیدی: موتور توربین گاز هوایی، دیسک دوار FGM، بارگذاری مکانیکی و حرارتی، خواص وابسته به شعاع و دما، گلرکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

1. مقدمه

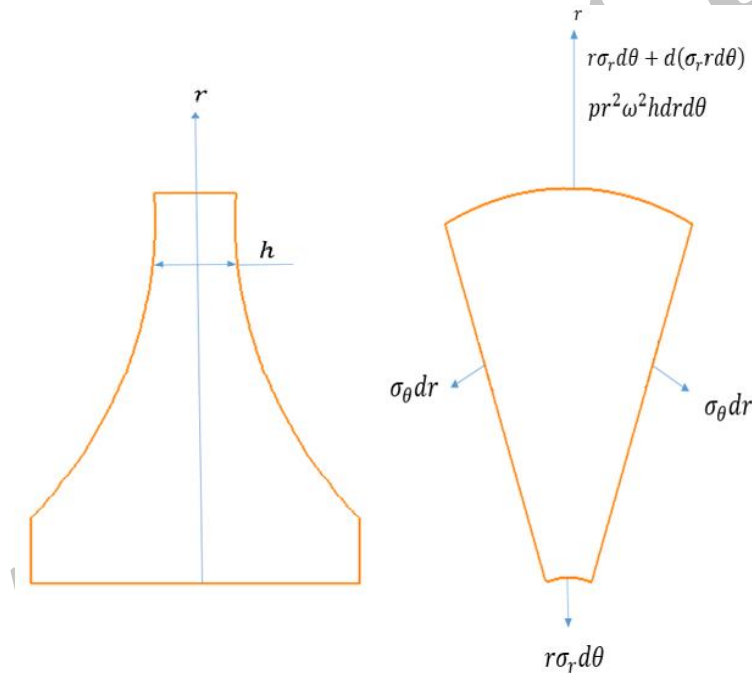
در موتورهای توربین گاز هوایی کمپرسور هوای فشرده را به داخل محفظه احتراق می‌فرستد و سپس با پاشش سوخت، احتراق در فشار و دمای بالا رخ می‌دهد و گازهای خروجی سوخت با سرعت، دما و فشار بالا به سمت توربین رانده می‌شوند تا با چرخش توربین انرژی حرارتی را به مکانیکی تبدیل کنند. روتور توربین در موتور توربین گازی از دو قسمت دیسک و پره‌ها تشکیل شده است. تانگ در سال 1969 یک راه حل وابسته به حل میدان تنش برای دیسک‌های غیر همگن با ضخامت ثابت در سه حالت متفاوت ارائه داد [1]. ندا در سال 1995 به روش المان محدود و با استفاده از المان‌های چهار گوش دو بعدی تنش‌های حرارتی در مقطعی از ورق‌های FGM را بررسی کرد [2]. ردی در سال 1981 مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، خمش محوری متقارن صفحات مسطح و مدور FGM را مطالعه و ارزیابی کرد [3]. توتونکو و ازتوک در سال 2001 حل تحلیلی تنش‌ها در مخازن FG تحت فشار را ارائه دادند [4]. تارن در سال 2001 حل تحلیلی استوانه‌های غیرایزوتروپ FG تحت اثر بارهای حرارتی و مکانیکی را ارائه کرد [5]. چنگ در سال 2001 صفحات ناهمگنی را که از مواد FG تشکیل شده بود را بررسی کرد و با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه اول دستگاه معادلات غیر خطی را در راستای تئوری فون کارمن ارائه داد

و با استفاده از سری فوریه معادلات را حل کرد [6]. جباری تحلیل مسائل پایای تنش حرارتی و متقارن محوری را برای سیلندرهای FGM جدار ضخیم مورد بررسی قرار داد [7]. جاهد و بیدآبادی در سال 2003 خزش اولیه و ثانویه را برای دیسک دوار غیر همگن بررسی کردند. آنها از خواص مواد، تنها مدول الاستیسیته را تابعی از شعاع در نظر گرفته و بقیه را ثابت فرض کردند [8]. موسوی در سال 2004 تحلیل تنش در دیسک دوار با ضخامت متغیر از مواد هدفمند که خواص مکانیکی متغیر و پیوسته در ضخامت را دارا می‌باشد را به روش عددی ارائه داد [9]. کرد خیلی و نقدآبادی در سال 2007 راه حل نیمه تحلیلی برای بدست آوردن تنش‌های دیسک دوار FG توخالی که تحت بارگذاری حرارتی قرار داشت را ارائه دادند [10]. پنگ و همکاران در سال 2012 اثر گرادیان دما روی پخش تنش در دیسک‌های دوار از جنس FGM را مورد بررسی قرار دادند [11].

مهمترین اهداف طراحی سازه و تولید مواد، کاهش وزن، کاهش هزینه، افزایش استحکام و پاسخگویی مناسب در برابر تنش‌های وارده بر آن می‌باشد. با در نظر گرفتن جنس FGM برای هر سازه می‌توان به صورت تقریبی به همه مزیت‌های فوق رسید. برای طراحی هر سازه‌ای باید نسبت به پاسخگویی استحکام آن در شرایط مختلف بارگذاری آگاه شد لذا سازه باید مورد تحلیل تنش و کرنش در بارگذاری‌های مختلف قرار گیرد. که در این مقاله به مقایسه سه روش پر کاربرد از گلرکین در حل مساله پرداخته است و مزایا و معایب آن‌ها بیان شده است.

2. تحلیل تنش دیسک FGM به سه روش متفاوت گلرکین

معادله تعادل برای المان شکل 1 از دیسک در جهت شعاعی به صورت رابطه (1) نوشته می‌شود:



شکل 1- تنش‌های وارده بر المانی از دیسک به همراه پروفیل ضخامت دیسک

$$\sum F_r = 0 \quad r\sigma_r d\theta + d(\sigma_r r d\theta) - \sigma_r r d\theta + pr^2 \omega^2 h dr d\theta - 2\sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (1)$$

که h ضخامت و ω سرعت زاویه‌ای دیسک است. با فرض تنش صفحه‌ای طبق رابطه (2) ترم تنش در راستای Z صفر می‌شود:

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = \sigma_z = 0 \quad (2)$$

از معادله (1)، بعد از ساده‌سازی رابطه (3) بدست می‌آید:

$$d\sigma_r r d\theta + \sigma_r r dr d\theta + \sigma_r r d^2\theta + pr^2 \omega^2 h dr d\theta - \sigma_\theta dr d\theta = 0 \quad (3)$$

و نهایتاً با تقسیم همه ترم‌ها بر سطح مقطع المان رابطه (4) حاصل می‌شود.

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + hpr^2 \omega^2 = 0 \quad (4)$$

روابط کرنش-جابجایی در رابطه‌های (5) تا (7) بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (6)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T \quad (7)$$

ρ چگالی دیسک و ترم ε^T بیانگر کرنش حرارتی ناشی از گرادیان حرارتی و ε^e کرنش الاستیک ناشی از سایر بارگذاری‌ها می‌باشد و به عنوان اثر حرارتی در معادلات الاستیسیته با کرنش کل الاستیک برای بدست آوردن کرنش کل جمع می‌شود. روابط تنش-کرنش شعاعی و محیطی در حالت الاستیک به صورت روابط (8) و (9) می‌باشند:

$$\varepsilon_r - \alpha\Delta T = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad (8)$$

$$\varepsilon_\theta - \alpha\Delta T = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad (9)$$

E مدول الاستیسیته و ν نسبت پواسون و α ضریب انبساط حرارتی است. از دو معادله فوق روابط تنش بر حسب کرنش به صورت روابط (10) و (11) می‌آیند:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha\Delta T) \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha\Delta T) \quad (11)$$

نهایتاً با جایگذاری روابط کرنش-جاب‌جایی در معادلات تنش-کرنش و جایگذاری معادله حاصله در رابطه تعادل دیسک معادله (12) حاصل می‌شود:

$$rhE \frac{d^2u}{dr^2} + \left(rh \frac{dE}{dr} + rE \frac{dh}{dr} + hE \right) \frac{du}{dr} + \left(\nu E \frac{dh}{dr} + \nu h \frac{dE}{dr} - \frac{1}{r} Eh \right) u + (1-\nu^2)h\rho\omega^2 r^2 - r(1+\nu) \frac{d(hE\alpha\Delta T)}{dr} = 0 \quad (12)$$

این معادله کلی تعادل یک دیسک ضخامت و خواص متغیر است که تحت بار گریز از مرکز و حرارتی متقارن است.

2-1. مدل‌های توزیع خواص

باید تابع توزیع خواص به نحوی باشد که بتواند رفتار ماده در هر نقطه از FGM را به درستی پاسخ دهد. بنابراین توابعی قابل قبول هستند که رفتار مواد هدفمند که خواص آنها با شعاع تغییر می‌کند را به درستی ارائه دهند. توابع مورد استفاده که این امکان را داشته باشند بسیار محدودند که در ادامه بیان می‌شوند.

الف) استفاده از رابطه غیرخطی

رابطه (13) غیر خطی از دو جنس فلز و سرامیک ماده FGM که خواص ماده در هر شعاع از دیسک را تعیین می‌کند.

$$P(r) = (P_o - P_i) \left(\frac{r-r_i}{r_o-r_i} \right)^n + P_i; r_i < r < r_o \quad (13)$$

که P_o و P_i به ترتیب نماد هر خاصیت در ابتدا و انتهای دیسک و r_o و r_i شعاع دیسک در ابتدا و انتها دیسک می‌باشند. (ب) استفاده از چند جمله‌ای

تابع چند جمله‌ای مرتبه m که بیانگر مقدار کمی هر خاصیت در شعاع مربوطه است که در رابطه (14) آمده است:

$$P(r) = P_\theta r^m; r_i < r < r_o \quad (14)$$

که در رابطه فوق p_θ و m اعداد ثابت هستند.

رابطه (14) به صورت یک یا چند جمله‌ای با ضرایب ثابت و تابعی از شعاع است که با داشتن ثوابت و شعاع هر نقطه از دیسک مقدار خواص در آن نقطه بدست می‌آید.

ج) استفاده از تابع نمایی

رابطه (15) خواص طبق تابع نمایی از r مانند زیر تغییر می‌کنند.

$$P(r) = P_i \exp \left[-\delta \left(1 + \frac{r_1+r_o}{H} - \frac{2r}{H} \right) \right] \quad (15)$$

که در آن:

$$\delta = \frac{1}{2} \log \left(\frac{P_i}{P_o} \right) \quad (16)$$

رابطه فوق برای یک استوانه بیان می‌شود که در آن p بیانگر خواص مکانیکی، r شعاع استوانه، r_0 و r_i شعاع خارجی و داخلی، H ضخامت استوانه و اندیس های a و o به ترتیب مربوط به فلز و سرامیک است.

(د) استفاده از رابطه غیر خطی متاثر از دمای مواد

در حالتی که خواص به دما نیز وابسته باشد، مقدار هر خاصیت در ابتدا و انتها به صورت رابطه (18) با دما تغییر می‌کند و از طرفی مقدار آن خاصیت در هر شعاعی از دیسک توسط رابطه (17) بدست می‌آید. به این ترتیب خواص به هر دو شعاع و دما وابسته است.

$$P(r) = (P_o - P_i) \left(\frac{r-r_i}{r_o-r_i} \right)^n + P_i; \quad r_i < r < r_o \quad (17)$$

$$P_o \text{ (or } P_i) = P_o (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (18)$$

در این رابطه دما بر حسب کلون است. ضرایب برای چند جنس با آزمایش‌های انجام شده بر روی آنها در مرجع موجود است.

2-2. شرایط مرزی

شرایط مرزی کلی که برای یک دیسک تعریف می‌شود به صورت روابط (19) و (20) هستند.

$$\begin{aligned} @ r = r_i; \sigma_r &= 0 \\ @ r = r_o; \sigma_r &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

این شرط زمانی استفاده می‌شود که در سطح داخلی و خارجی دیسک هیچ گونه تنش اعمال نشود.

$$\begin{aligned} @ r = r_i; \sigma_r &= -p_{im} \\ @ r = r_o; \sigma_r &= p_{im} \end{aligned} \quad (20)$$

این شرط زمانی استفاده می‌شود که در سطح داخلی دیسک تنش فشاری p_{im} و در سطح بیرونی دیسک تنش کششی p_{im} وارد شود.

2-3. مدل هندسی

پروفیل ضخامت استفاده شده در این مساله سهموی¹ بوده و با ضرایب ثابت تابعی از شعاع است که به صورت معادله (21) بیان می‌شود.

$$h(r) = h_0 \left(1 - q \left(\frac{r}{r_0} \right)^{m_1} \right) \quad (21)$$

پروفیل دیسک مدنظر پروفیل سهمی‌وار را دنبال می‌کند. که h_0 ضخامت در محور دیسک است. q یک عدد بین صفر و یک است ولی می‌تواند صفر نیز شود. با صفر شدن q پروفیل ضخامت یکنواخت می‌شود. m_1 یک عدد همواره مثبت است که اگر برابر یک شود و q مخالف صفر باشد پروفیل ضخامت به صورت خطی افزایش می‌یابد. اگر m_1 یک عدد بین صفر و یک باشد پروفیل دیسک به صورت مقعر و اگر بزرگتر از یک به صورت محدب تغییر می‌کند.

2-4. روش گلرکین

روش گلرکین نوعی روش حل المان محدود خاص بوده و با المان بندی دیسک مساله به حل معادله دیفرانسیل حاکم بر دیسک FGM دوار می‌پردازد. با انتگرال گیری توابع شکل و معادله حاکم بر روی حجم المان و اضافه کردن شرایط مرزی به معادله حاکم و ترکیب آنها ماتریس سختی و نیروی هر المان و کل بدست می‌آید. در روش گلرکین از المان‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد که در این تحقیق از المان هرمیتی استفاده شده است. المان هرمیتی از چهار تابع شکل استفاده کرده است و برای محاسبه مقدار مشتق جابه‌جایی مشتق دو تابع شکل در دو نقطه المان گرفته می‌شود. به دلیل استفاده از چهار تابع

¹ Parabolic

شکل و مشتقات جابه‌جایی در نقاط جواب‌های دقیق‌تری را مخصوصاً در گره‌ها می‌دهد. با در نظر گرفتن معادله (12) و ساده نویسی ضرایب با حروف، معادله حاکم بر دیسک به فرم معادله (22) بدست می‌آید.

$$Au'' + Bu' + Cu + D = 0 \quad (22)$$

در ادامه روند حل مساله با روش گلرکین ابتدا المان لاگرانژی با دو تابع شکل شرح داده شده است و در انتها تغییراتی که برای المان هرمیتی باید روی روابط اعمال شود اضافه شده است. جابجایی به صورت رابطه (23) تعریف می‌گردد:

$$u = N_i u_i + N_j u_j \quad (23)$$

روابط توابع شکل در حالت خطی به صورت رابطه (24) تعریف می‌شود:

$$N_i = \frac{r_j - r}{l}, N_j = \frac{r - r_i}{l} \quad (24)$$

بدین صورت که r_j مختصات نقطه انتهایی و r_i مختصات ابتدایی و l طول المان می‌باشد.

در این مرحله روش گلرکین روی معادله (25) اعمال می‌گردد:

$$\begin{aligned} \int N_i (Au'' + Bu' + Cu + D) dv &= 0 \\ \int N_j (Au'' + Bu' + Cu + D) dv &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$dv = r dr d\theta dz$$

با ساده سازی انتگرال (25) روابط (26) و (27) حاصل می‌شود:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_i}^{r_o} N (Au'' + Bu' + Cu + D) r dr dz d\theta = 0 \quad (26)$$

$$\int N_i (Au'' + Bu' + Cu + D) 2\pi r dr h = 0 \quad (27)$$

$$\int N_j (Au'' + Bu' + Cu + D) 2\pi r dr h = 0$$

قسمت اول این انتگرال به روش جزء به جزء حل شده است و روابط (28) و (29) بدست می‌آید:

$$(rN_i A) h u' \Big|_{r_i}^{r_o} - \int (rN_i A h)' u' dr + \int rN_i h (Bu' + Cu + D) dr = 0 \quad (28)$$

$$(rN_j A) h u' \Big|_{r_i}^{r_o} - \int (rN_j A h)' u' dr + \int rN_j h (Bu' + Cu + D) dr = 0 \quad (29)$$

برای محاسبه ماتریس سختی و نیروی هر المان از روابط (30) و (31) استفاده می‌شود:

$$\int [-(rN_i A h)' u' + rN_i h (Bu' + Cu + D)] dr = 0 \quad (30)$$

$$\int [-(rN_j A h)' u' + rN_j h (Bu' + Cu + D)] dr = 0 \quad (31)$$

با جدا سازی ضرایب u_i و u_j روابط (32) و (33) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \{ \int [-(rN_i A h)' N_i' + rN_i h B N_i' + rCh N_i N_i] dr \} u_i + \\ \{ \int [-(rN_i A h)' N_j' + rN_i h B N_j' + rCh N_i N_j] dr \} u_j + \int rN_i h D dr = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \{ \int [-(rN_j A h)' N_i' + rN_j h B N_i' + rCh N_j N_i] dr \} u_i + \{ \int [-(rN_j A h)' N_j' + rN_j h B N_j' + \\ rCh N_j N_j] dr \} u_j + \int rN_j h D dr = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

در ادامه و با استفاده از روابط (32) و (33) ماتریس سختی و نیروی هر المان به صورت روابط (34) و (35) بدست می‌آیند:

$$k_{ii} u_i + k_{ij} u_j = f_i \quad (34)$$

$$k_{ji} u_i + k_{jj} u_j = f_j$$

$$[K_{ele u}]_{2 \times 2} [u_{ele u}]_{2 \times 1} = [f_{ele u}]_{2 \times 1} \quad (35)$$

در نهایت ماتریس سختی کل سازه به صورت $[K_T]_{(N+1) \times (N+1)}$ تعیین می‌گردد.

که N تعداد حلقه است. سپس با استفاده از رابطه (36) و داشتن مقادیر ماتریس سختی و نیرو کل مقادیر جابه‌جایی در هر

گره بدست می‌آید:

$$[K_T][u_T] = [f_T] \quad (36)$$

1-4-2. المان لاگرانژی:

روابط و الگوریتم حل نوع لاگرانژی گلرکین نیز روندی مشابه به حالت با دو درجه آزادی دارد. با این تفاوت که در این حالت از سه تابع شکل استفاده می‌شود که روابط آن‌ها و ژاکوبین تبدیل متغیر وابسته به شعاع دیسک در ادامه آورده شده است. رابطه جابه‌جایی با چهار تابع شکل المان هرمیتی در رابطه (37) آورده شده است.

$$u^e = N_1(r_{i-1}) + N_2(r_i) + N_3(r_{i+1}) \quad (37)$$

روابط توابع شکل در رابطه (38) آورده شده است. که ξ معادل شعاع در مختصات محلی هر المان است و با ژاکوبین رابطه (39) روابط تعریف شده از r و dr به ξ و $d\xi$ تبدیل می‌شوند.

$$N_1 = -\frac{\xi}{2}(1 - \xi), N_2 = (1 - \xi)(1 + \xi) \quad (38)$$

$$N_3 = +\frac{\xi}{2}(1 + \xi)$$

رابطه ژاکوبین تبدیل با طول هر المان در روش هرمیتی به صورت رابطه (39) است:

$$[J] = \frac{L}{2}$$

$$dr = \frac{L}{2} \times d\xi \quad (39)$$

$$L = r_2 - r_1$$

با بسط انتگرال توابع شکل و معادله دیفرانسیل حاکم به مقادیر درایه‌های ماتریس سختی و نیروی هر المان و کل رسیده و با حل معادله ماتریسی بدست آمده به ترتیب مقادیر جابه‌جایی و تنش و کرنش بدست می‌آید. برای محاسبه تنش و کرنش با استفاده از مقادیر جابه‌جایی از روابط (5) تا (11) استفاده می‌شود.

2-4-2. المان هرمیتی:

روابط و الگوریتم حل نوع هرمیتی گلرکین نیز روندی مشابه به حالت با دو درجه آزادی دارد. با این تفاوت که در این حالت از چهار تابع شکل استفاده می‌شود که روابط آن‌ها و ژاکوبین تبدیل متغیر وابسته به شعاع دیسک در ادامه آورده شده است. رابطه جابه‌جایی با چهار تابع شکل المان هرمیتی در رابطه (40) آورده شده است.

$$u^e = N_1 u_1 + N_2 \frac{du}{d\xi} \Big|_1 + N_3 u_2 + N_4 \frac{du}{d\xi} \Big|_2 \quad (40)$$

که مشتق جابه‌جایی نسبت به مکان در ابتدا و انتهای هر المان می‌باشد. روابط توابع شکل در رابطه (38) آورده شده است. که ξ معادل شعاع در مختصات محلی هر المان است و با ژاکوبین رابطه (41) روابط تعریف شده از r و dr به ξ و $d\xi$ تبدیل می‌شوند.

$$N_1 = \frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2), N_2 = \frac{1}{4}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1) \quad (41)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi - 2), N_4 = \frac{1}{4}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1)$$

با رابطه‌ی درجه سه توابع شکل با مکان تعریف پیوسته و به صورت منحنی درجه سه از توزیع مقادیر توابع شکل در هر المان بدست می‌آید. رابطه ژاکوبین تبدیل با طول هر المان در روش هرمیتی به صورت رابطه (42) است:

$$[J] = \frac{L}{2}$$

$$dr = \frac{L}{2} \times d\xi \quad (42)$$

$$r = N_1 r_1 + N_2 \frac{dr}{d\xi} \Big|_1 + N_3 r_2 + N_4 \frac{dr}{d\xi} \Big|_2$$

$$L = r_2 - r_1$$

با بسط انتگرال توابع شکل و معادله دیفرانسیل حاکم به مقادیر درایه‌های ماتریس سختی و نیروی هر المان و کل رسیده و با حل معادله ماتریسی بدست آمده به ترتیب مقادیر جابه‌جایی و تنش و کرنش بدست می‌آید. برای محاسبه تنش و کرنش با استفاده از مقادیر جابه‌جایی از روابط (5) تا (11) استفاده می‌شود.

2-5. جدول‌ها

جدول 1- مشخصات هندسه و بارگذاری دیسک مثال اول

مشخصات مکانیکی و هندسی در سطح داخل و خارج		
151×10^9	70×10^9	مدول الاستیسیته (pa)
0.3	0.3	نسبت پواسون
5700	2700	چگالی ($\frac{kg}{m^3}$)
100	0	دما ($^{\circ}C$)
500	500	سرعت زاویه‌ای ($\frac{rad}{s}$)
10×10^{-6}	23×10^{-6}	ضریب انبساط حرارتی ($\frac{1}{^{\circ}C}$)
0.5	0.5	M
0.96	0.96	Q
0.02	0.02	h_0
0.1	0.1	r_1 (m)
0.5	0.5	r_2 (m)

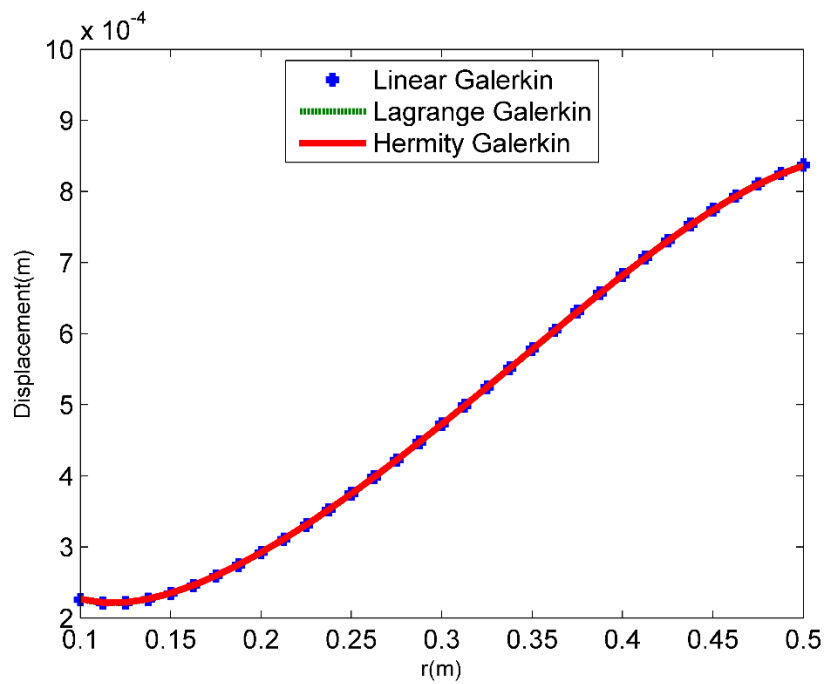
جدول 2- مشخصات هندسه و بارگذاری دیسک مثال دوم

مشخصات مکانیکی و هندسی در سطح داخل و خارج		
151×10^9	70×10^9	مدول الاستیسیته (pa)
0.3	0.3	نسبت پواسون
5700	2700	چگالی ($\frac{kg}{m^3}$)
200	100	دما ($^{\circ}C$)
5670	5670	سرعت زاویه‌ای ($\frac{rad}{s}$)
10×10^{-6}	23×10^{-6}	ضریب انبساط حرارتی ($\frac{1}{^{\circ}C}$)
0.5	0.5	M
0.96	0.96	Q
0.02	0.02	h_0
0.01	0.01	r_1 (m)
0.11	0.11	r_2 (m)

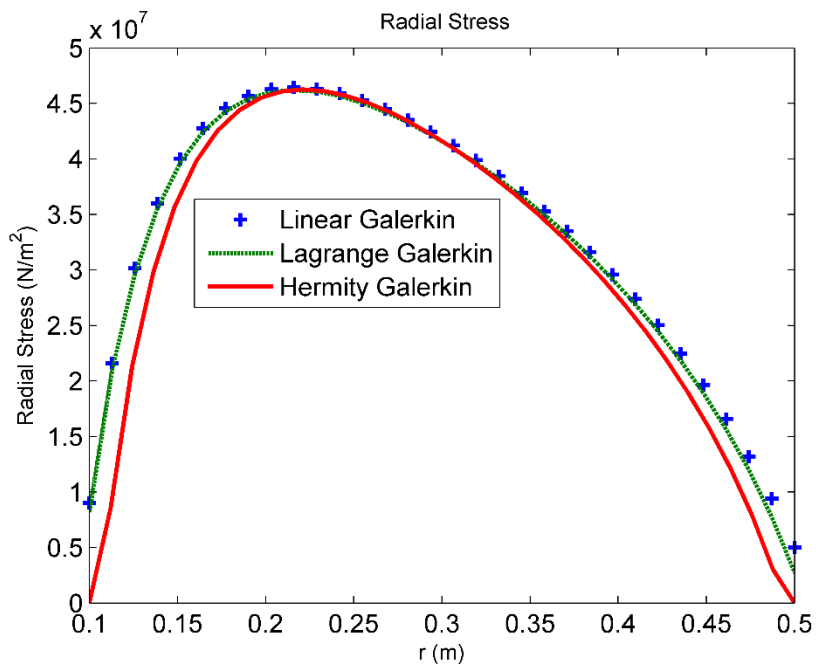
2-6. نتایج و بحث روی نتایج

2-6-1. مقایسه سه روش گلرکین برای مثال اول

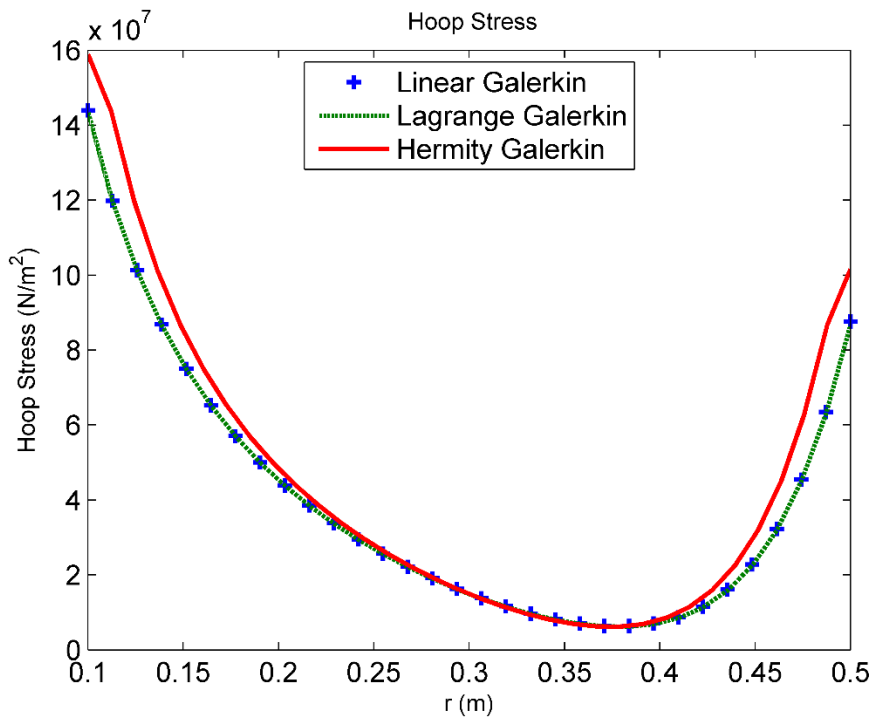
مشخصات مثال اول در جدول 1 آورده شده است. در این قسمت مساله با سه روش مختلف از گلرکین حل شده است و نتایج جهت مقایسه و بررسی در شکل‌های 2 تا 6 آورده شده است. این حالت بدون اعمال شرایط مرزی می‌باشد و خواص دیسک فقط تحت شعاع تغییر می‌کنند.



شکل 2- نمودار جابه جایی سه روش گالریکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی با توجه به شکل 2 تقریباً مقادیر جابه جایی رخ داده در نقاط مختلف دیسک در راستای شعاع با هر سه روش یکسان می باشد.

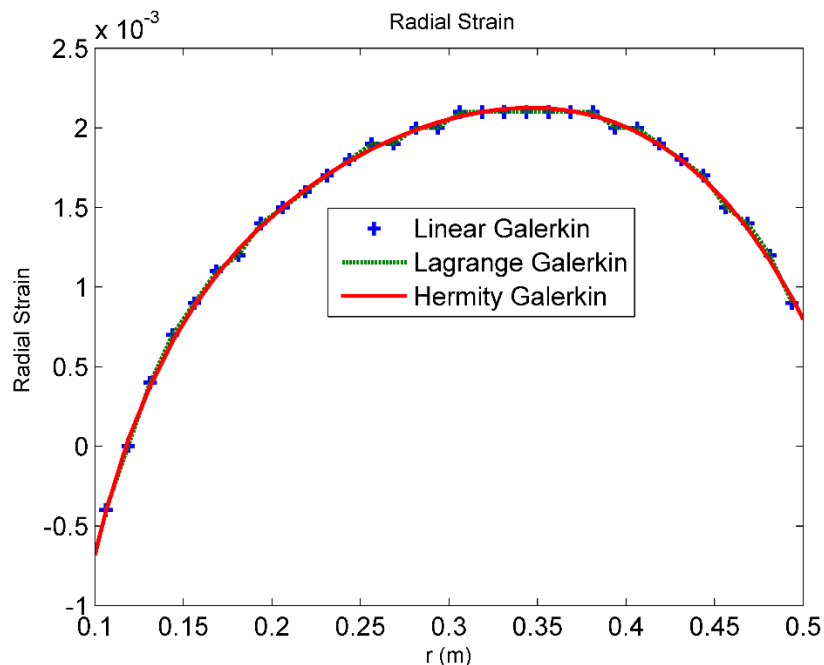


شکل 3- نمودار تنش شعاعی سه روش گالریکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی



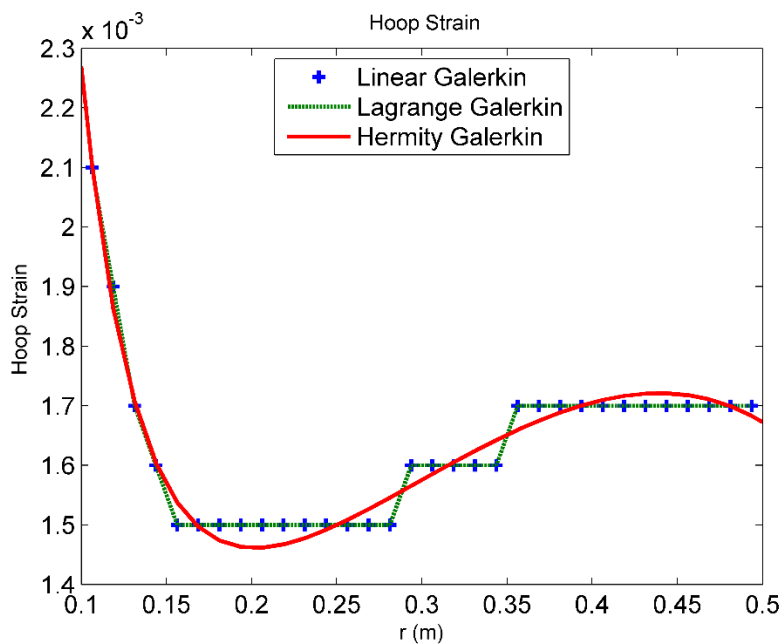
شکل 4- نمودار تنش محیطی سه روش گالریکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

با توجه به شکل 3 و 4 تنش شعاعی و محیطی با دو روش خطی و لاگرانژی همخوانی بیشتری دارند ولی در المان هرمیتی با توجه به استفاده از چهار تابع شکل که دو تا از آنها روی مشتق جابه‌جایی نسبت به شعاع است دقت نتایج و پیوستگی نتایج بیشتر است.



شکل 5- نمودار کرنش شعاعی سه روش گالریکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

بر خلاف تنش‌ها در کرنش شعاعی نتایج هر سه روش با هم انطباق دارند.

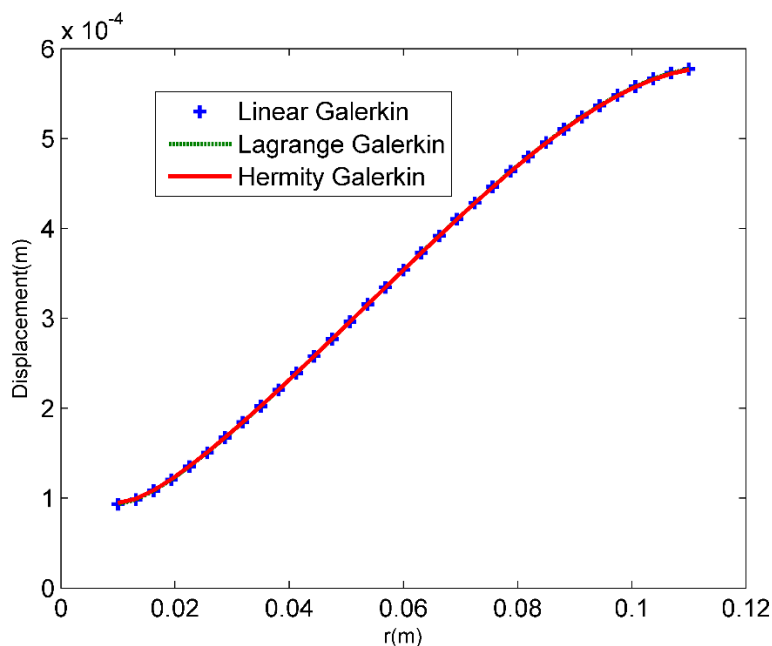


شکل 6- نمودار کرنش محیطی سه روش گالریکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

با توجه به شکل 6 در دو روش خطی و لاگرانژ در بعضی از از نقاط که حد فاصل المان‌ها می‌باشد به دلیل عدم پیوستگی مشتق جابه‌جایی پرش اتفاق افتاده که در المان هرمیتی این مشکل وجود ندارد.

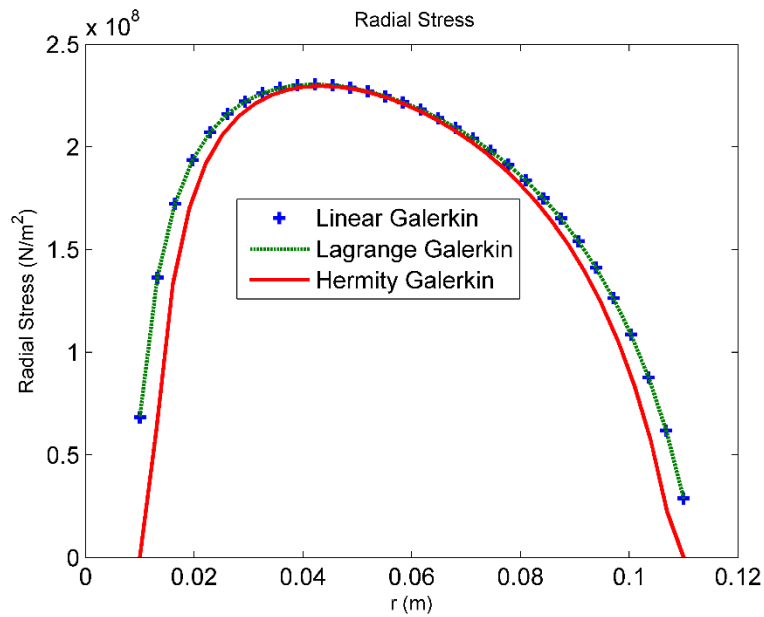
2-6-2. مقایسه سه روش گالریکین برای مثال دوم

مشخصات مثال دوم در جدول 2 آورده شده است. در این قسمت مساله با سه روش مختلف از گالریکین حل شده است و نتایج جهت مقایسه و بررسی در شکل‌های 7 تا 11 آورده شده است. این حالت بدون اعمال شرایط مرزی می‌باشد و خواص دیسک فقط تحت شعاع تغییر می‌کنند. تفاوت این قسمت با قسمت قبل در نوع دیسکی می‌باشد که تحت تحلیل با این سه روش قرار گرفته است. که هم هندسه و هم بارگذاری روی آن تغییر کرده است.

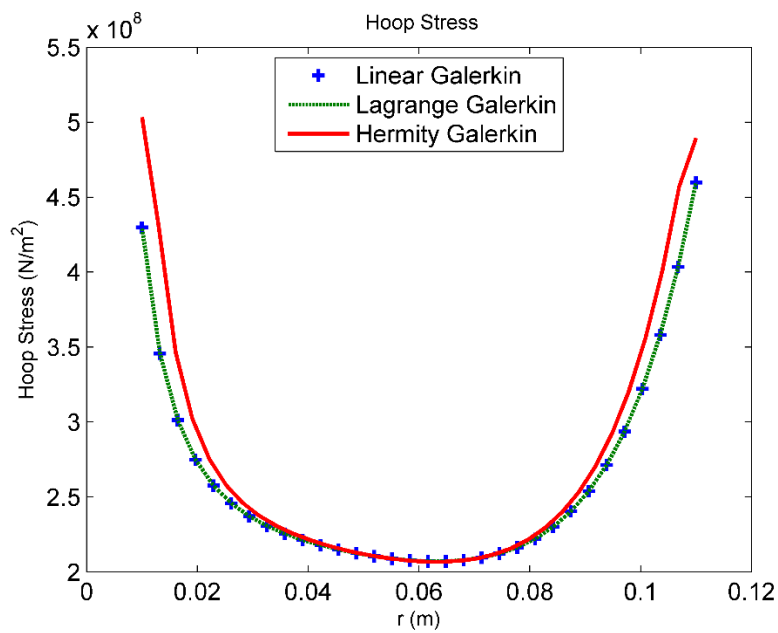


شکل 7- نمودار جابه‌جایی سه روش گالریکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

با توجه به شکل 7 با کاهش ابعاد دیسک و افزایش بارگذاری‌ها بازه تغییرات مقادیر جابه‌جایی کاهش یافته است.

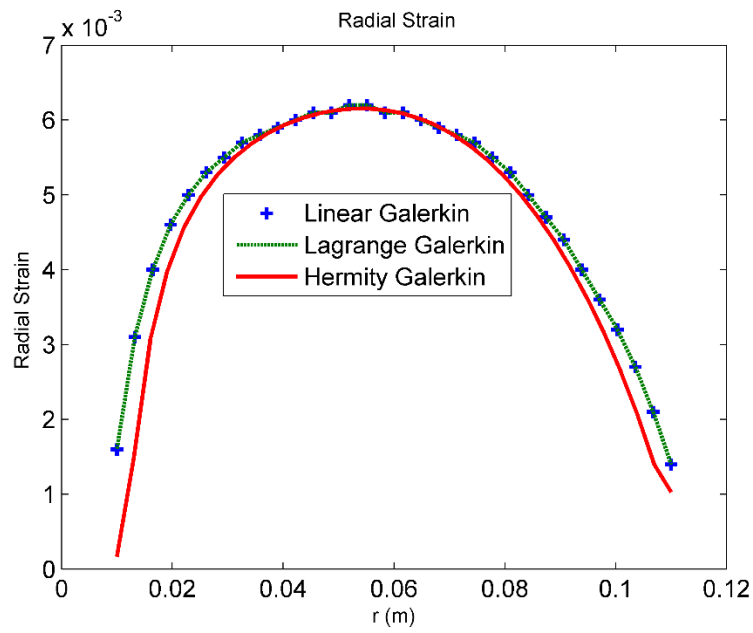


شکل 8- نمودار تنش شعاعی سه روش گلرکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

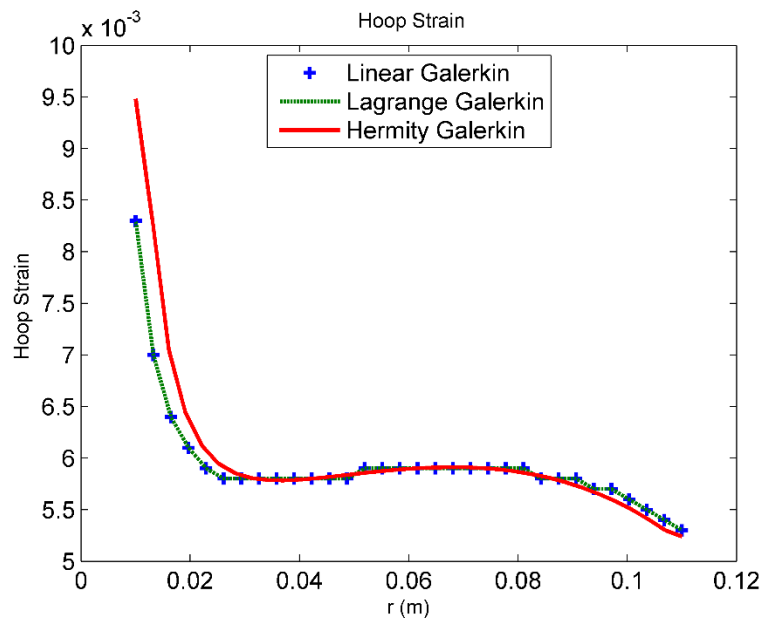


شکل 9- نمودار تنش محیطی سه روش گلرکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

با توجه به شکل 8 و 9 مقادیر تنش شعاعی و محیطی نسبت به مثال اول افزایش یافته که علت آن افزایش بارگذاری‌ها می‌باشد و مقادیر نتایج در المان هرمیتی در تنش شعاعی کمتر از دو روش دیگر و در تنش محیطی بیشتر از دو روش دیگر است.



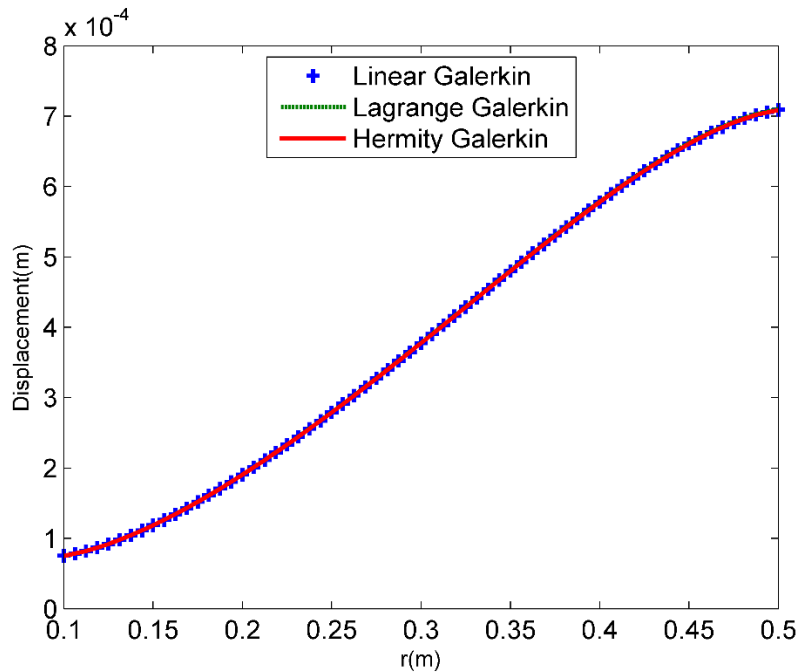
شکل 10- نمودار کرنش شعاعی سه روش گالرکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی



شکل 11- نمودار کرنش محیطی سه روش گالرکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

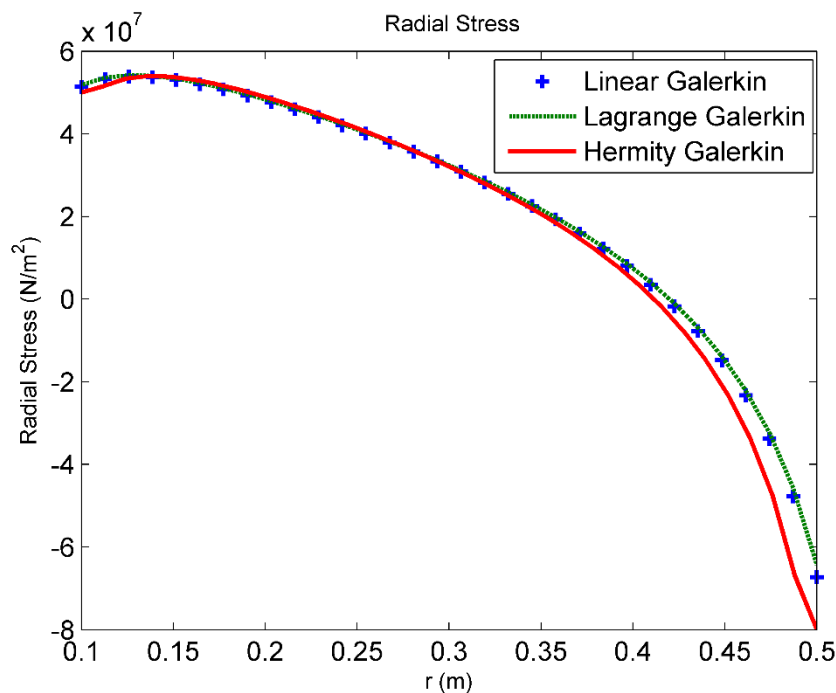
با توجه به شکل 10 و 11 همان روند تنش‌ها در مقادیر کرنش نیز اتفاق می‌افتد و در کرنش شعاعی مقادیر المان هرمیتی کمتر و در کرنش محیطی بیشتر از دو روش دیگر می‌باشد.

3-6-2. مقایسه سه روش گلرکین برای مثال اول در حالتی که در سطح داخلی و بیرونی دیسک تنش وارد شود مشخصات مثال این قسمت در جدول 1 آورده شده است. در این قسمت مساله با سه روش مختلف از گلرکین حل شده است و نتایج جهت مقایسه و بررسی در شکل‌های 12 تا 16 آورده شده است. این حالت با اعمال شرایط مرزی می‌باشد و خواص دیسک فقط تحت شعاع تغییر می‌کنند. یک تنش در جهت مثبت شعاع در سطح داخل دیسک به اندازه 5×10^7 پاسکال و یک تنش در سطح خارجی دیسک در جهت منفی شعاع در سطح خارجی دیسک به اندازه -8×10^7 پاسکال می‌باشد.



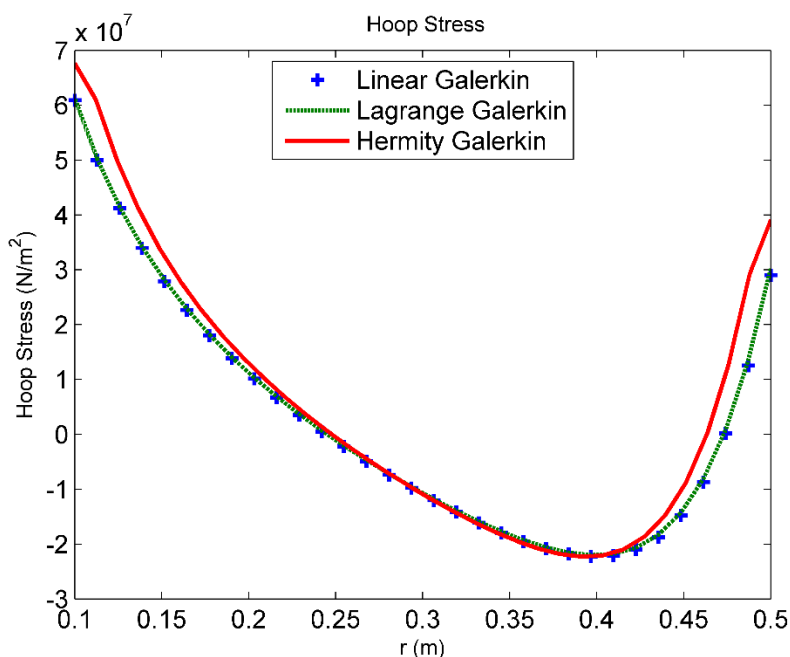
شکل 12- نمودار کرنش محیطی سه روش گلرکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

با توجه به شکل 12 و اعمال بارگذاری‌های مرزی در سطح داخلی و خارجی دیسک بازه تغییرات جابه‌جایی کاهش یافته است.



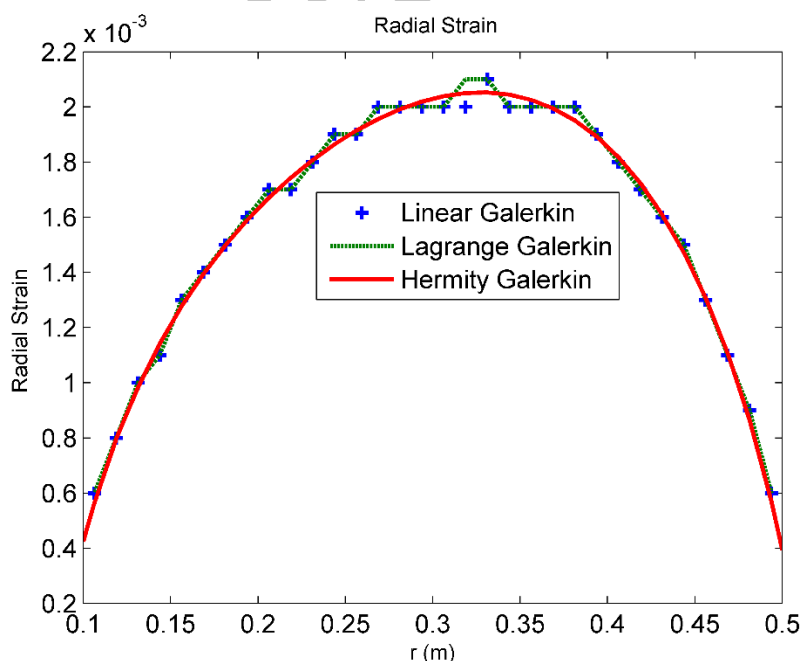
شکل 13- نمودار کرنش محیطی سه روش گلرکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

با توجه به اندازه تنش‌های مرزی مقادیر ابتدا و انتهای تنش شعاعی برابر با مقادیر در سطح داخلی و خارجی دیسک است که این مورد در المان هرمیتی بهتر مشخص است. علت این امر پیوسته بودن المان هرمیتی در گره‌های دیسک است.

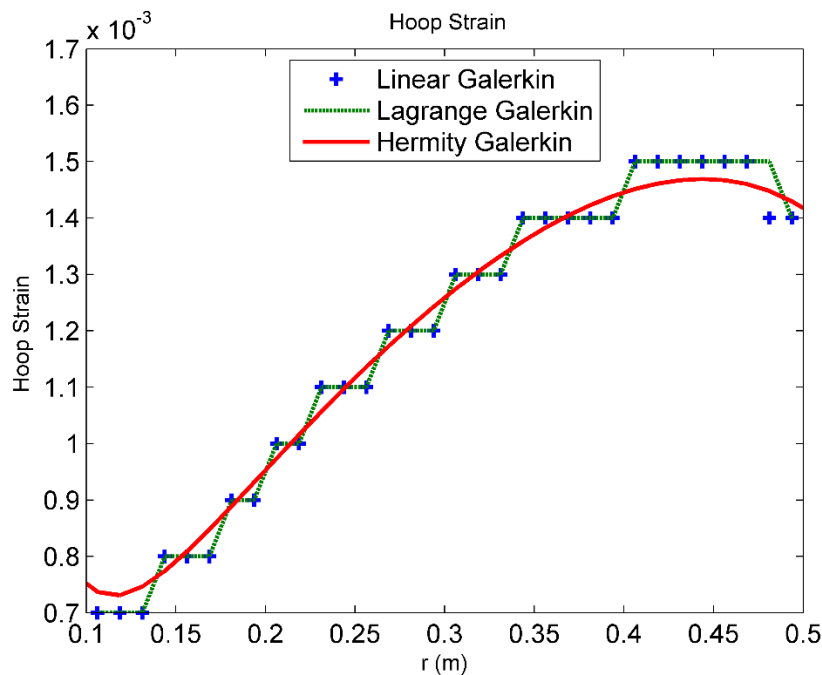


شکل 14- نمودار کرنش محیطی سه روش گلرکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

در تنش محیطی نیز مقادیر عددی کل نمودار کاهش یافته است. این امر به خاطر تنش مرزی که در خلاف جهت دیگر بارگذاری‌ها در سطح بیرونی دیسک می‌باشد.



شکل 15- نمودار کرنش محیطی سه روش گلرکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی



شکل 16- نمودار کرنش محیطی سه روش گلرکین خطی، لاگرانژ و هرمیتی

با توجه به شکل 15 و 16 عدم پیوستگی در نقاط بین دو المان را به وضوح در دو روش خطی و لاگرانژی مشاهده می‌شود. که این نقص در المان هرمیتی رفع شده است.

3. نتیجه گیری

در این مقاله مساله دو دیسک FGM دوار سوراخ‌دار تحت بارگذاری‌های گریز از مرکز و گرما تحت آنالیز تنش کرنش قرار گرفته است. در دیسک دوم با توجه به کاهش ابعاد و افزایش مقادیر بارگذاری‌ها مقادیر تنش افزایش یافت. بازه تغییرات در جابه‌جایی و کرنش نیز کاهش یافت. در قسمت بعد شرایط مرزی به دیسک اول اضافه شد که فرم نمودار تنش شعاعی به نحوی که از وسط دیسک تا ابتدای دیسک به سمت مقدار تنش در سطح داخلی دیسک و از وسط تا انتهای دیسک نیز مقادیر به سمت مقدار تنش مرزی در سطح خارجی دیسک تمایل پیدا کرد. به طور کلی المان هرمیتی با استفاده از چهار تابع شکل و پیوستگی در مشتق جابه‌جایی به شعاع دقت نتایج و پیوستگی بهتری را نسبت به دو روش دیگر داشت. همچنین گرایش به شرایط مرزی در المان هرمیتی دقیق‌تر اتفاق می‌افتد. دو روش لاگرانژی و خطی نتایج نزدیک به هم داشتند. از مزایای دو روش خطی و لاگرانژی ساده‌تر بودن مسیر حل مساله و زمان کمتر در جوابگیری اجرای کد برنامه است. در المان لاگرانژی با استفاده از سه تابع شکل در یک المان جواب‌های دقیق‌تری نسبت به المان خطی که از دو تابع شکل در یک المان استفاده می‌کند، دارد.

مراجع

1. S.Tang, **Elastic stresses in rotating anisotropic disks**, International Journal of Mechanical Sciences 11.6 (1969): 509-517.
2. F.Takashi and N.Noda, **Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material**, JSAE review 16.3 (1995): 263-268.
3. J.N.Reddy and C. L. Haung, **Nonlinear axisymmetric bending of annular plates with varying thickness**, International Journal of Solids and Structures 17.8 (1981): 811-825.
4. N.Tutuncu and M.Ozturk, **Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels**, Composites Part B: Engineering 32.8 (2001): 683-686.

5. J.Tarn, **Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads**, International Journal of Solids and Structures 38.46 (2001): 8189-8206.
6. Zh.Cheng and S. Kitipornchai, **Exact bending solution of inhomogeneous plates from homogeneous thin-plate deflection**, AIAA journal 38.7 (2000): 1289-1291.
7. M.Jabbari and S.Sohrabpour and M.R.Eslami, **Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads**, International Journal of Pressure Vessels and Piping 79.7 (2002): 493-497.
8. H.Jahed and J.Bidabadi, **An axisymmetric method of creep analysis for primary and secondary creep**, International journal of pressure vessels and piping 80.9 (2003): 597-606.
9. A.Mosavi, **Analyze stresses in a functionally graded cylinder with variable thickness**, Paper aerospace 7.3 (2004): 276-282.
- 10.S.A.Hosseini Kordkheili and R.Naghdabadi, **Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk**, Composite Structures 79.4 (2007): 508-516.
11. X.L.Peng and X.F.Li, **Effects of gradient on stress distribution in rotating functionally graded solid disks**, Journal of mechanical science and technology 26.5 (2012): 1483-1492.

Archive of SID



Comparison of different Galerkin methods in the stress analysis of rotary FGM disk under mechanical and thermal loads in different states

Mehrdad Safari

*Department of Mechanical Engineering
Malek Ashtar University of Technology
Isfahan, Iran*

Behrooz Shahriari

*Department of Mechanical Engineering
Malek Ashtar University of Technology*

Abstract: Rotating disks are widely used in various industries, such as aerospace, automotive, power plants and marine. These disks are under mechanical and thermal loads. In this study, three different methods of Galerkin methods have been used to calculate the displacement values and stresses and strains of a rotating disk of functional grading material (FGM). These three methods are called Galerkin with two shape function or linear, the Galerkin Lagrange and Hermite. Disk properties change in a certain function with radius. The mechanical loading conditions are due to the time of the disk itself and the thermal stress caused by the temperature difference. In this paper, we compare the three application methods of Galerkin in problem solving and their advantages and disadvantages are expressed. According to the results of the Hermite elementalization, due to the use of four function functions, the two of which are defined on the derivative of the displacement to the radius, there is a higher continuity and accuracy than the other two methods.

Keywords: Air turbine gas engine, FGM rotary disk, mechanical and thermal loading, radius and temperature properties, linear Galerkin, Lagrange and Hermite.