کنترل‌کننده مد لغزشی ترمینال پیوسته برای سیستم‌های مرتبه دوم دارای اختلال و نامعینی

آزاده بارو، دانشجوی کارشناسی ارشد برق کنترل، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
azadebarou@gmail.com
زهرا رحمانی چراتی، دانشیار دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
zrahmani@nit.ac.ir
سارا میناگر، استادیار دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
minagar@nit.ac.ir

چکیده

در این مقاله با سیستم‌های مرتبه دوم دارای نامعینی و اختلال رو به رو هستیم و روش کنترل‌کننده مد لغزشی ترمینال پیوسته، برای این دسته از سیستم‌ها بسط داده شده است. این الگوریتم همگرایی به اسلایدینگ مرتبه سوم در زمان محدود و در نتیجه دقت اسلایدینگ از درجه‌ی سوم نسبت به خروجی را تنها با داشتن اطلاعات خروجی و مشتق اول آن نتیجه می‌دهد، نامعینی‌ها و اختلالات فشرده‌ی لیپ‌شیتز را جبران می‌کند، سیگنال کنترل پیوسته ایجاد می‌کند که منجر به کاهش چترینگ می‌گردد. همگرایی این الگوریتم از طریق یک تابع لیاپانوف همگن، پیوسته مشتق‌پذیر و اکید، پیشنهاد و اثبات می‌شود. شبیه‌سازی‌ها در نرم‌افزار متلب با استفاده از یک مثال فرضی، نتایج همگرایی حالت‌های سیستم به اسلایدینگ مرتبه سوم و دقت آن‌ها را برای سیستمی مرتبه دو با نامعینی پله نشان می‌دهند.

کلیدواژه‌ها: پایداری لیاپانوف، کنترل مد لغزشی ترمینال پیوسته، نامعینی، همگنی، اختلال.

1- مقدمه

یکی از مؤثرترین تکنیک‌های کنترل سیستم در حضور نامعینی شدید، کنترل مد لغزشی (SMC)[1] می‌باشد. هدف از این کنترل‌کننده جبران نامعینی، با صفر نگه داشتن متغیرهای انتخابی لغزش است اما ایراد آن نوسان‌هایی است که به دلیل فرکانس سوییچینگ بالا ایجاد می‌کند که منجر به چترینگ می‌شود (کمال و همکاران، 2016). در دو دهه‌ی اخیر، روش‌هایی بکارگرفته شده است تا تأثیر چترینگ را کاهش دهد؛ یکی از معروف‌ترین آنها مد لغزشی مرتبه‌ی بالا (HOSM)[2] می‌باشد (بارتولینی و همکاران، 1998)

مد لغزشی مرتبه‌ی بالا برای سیستم‌هایی با درجه‌ی نسبی r منجر به همگرایی به صفر در زمان محدود خروجی σ و $r-1$ مشتق اول آن می‌شود و نشان داده شده است که بهترین دقت ممکن با بازه‌ی نمونه‌برداری τ، با انتخاب $\sigma_j = 0(\tau^r - j)\,, j = 1,2,\dots, r-1$ حاصل می‌شود (لوانت، 1993). کنترل‌کننده HOSM همگن از درجه r این دقت را فراهم می‌کند و دنبال‌یابی خروجی با دقت مناسب با در نظر گرفتن گام نمونه‌برداری، نویزهای اندازه‌گیری و عملگرهای با دینامیک سریع صورت می‌گیرد، اما مهم‌ترین اشکال این است که سیگنال کنترل ناپیوسته است که باعث چترینگ می‌گردد (لوانت و فرایدمن، 2010).

الگوریتم سوپر توئیستینگ (STA)[3] یکی از کنترل‌کننده‌های اسلایدینگ مهم است و برخلاف HOSM برای سیستم‌هایی با درجه‌ی نسبی 1 نسبت به σ طراحی شده است. از مزایای این روش می‌توان این موارد را ذکر کرد: نامعینی‌ها و اختلالات فشرده‌ی لیپ‌شیتز را جبران می‌کند درحالی که اسلایدینگ مرتبه اول تنها قادر به جبران نامعینی‌ها و اختلالات ناپیوسته و کراندار یکنواخت می‌باشد، همگرایی زمان محدود $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ را فراهم می‌کند، تنها نیاز به داشتن اطلاعات خروجی دارد، سیگنال کنترل پیوسته ایجاد می‌کند و در نتیجه چترینگ کاهش می‌یابد، دارای اسلایدینگ با دقت از مرتبه اول نسبت به $\dot{\sigma}$ و دقت از مرتبه دوم نسبت به σ می‌باشد. اولین اثبات همگرایی STA بر اساس ایده‌ی منحنی‌های ماجورانت[4] بود (لوانت، 1998؛ لوانت 2003). بعدها اثبات‌هایی به روش لیاپانوف مطرح شدند (پلیاکوف و پزنیاک، 2009؛ ارلف و همکاران، 2011؛ مورنو و اسوریو، 2008). الگوریتم سوپر توئیستینگ (STA) می‌تواند در سیستم‌هایی با درجه‌ی نسبی 2 برای کاهش چترینگ بکارگرفته شود (فرایدمن، 2011). با این انتخاب سطح لغزش در این مراجع، نامعینی‌ها و اختلال‌ها جبران می‌شوند و همگرایی به $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ در زمان محدود برآورده می‌شود اما σ و $\dot{\sigma}$ تنها به صورت تناوبی به مبدا همگرا می‌شوند.

کنترل‌کننده مد لغزشی با درجه دلخواه می‌تواند برای کاهش چترینگ در سیستم‌هایی با درجه‌ی نسبی 2 بکار رود (لوانت، 1993؛ بارتولینی و همکاران، 1998؛ لوانت، 2005). برای تنظیم چترینگ و تولید سیگنال کنترل پیوسته می‌توان درجه‌ی سیستم را با مشتق‌گیری سطح لغزش به 3 افزایش داد و مد لغزشی گوسی با درجه‌ی 3 برای قانون کنترل اعمال کرد. این کنترل‌کننده همگرایی سطوح لغزش را به مبدأ تأمین می‌کند و شرایط لیپ شیتز را برآورده می‌سازد اما عیب آن این است که نیاز به داشتن اطلاعات $\ddot{\sigma}$ دارد.

بنابراین مسأله‌ی طراحی کنترل‌کننده‌ای که پیوسته باشد و موجب همگرایی مد لغزشی مرتبه سوم شود و تنها نیاز به دانستن σ و $\dot{\sigma}$ داشته باشد، حائز اهمیت است. اولین تحقیقاتی که در زمینه حل این مساله صورت

---
[1] Sliding Mode Control
[2] High Order Sliding Mode
[3] Super Twisting Algorithm
[4] Majorant

گرفت ترکیب سوپر توئیستینگ و توئیستینگ یا الگوریتم پیوسته را مورد استفاده قرار داده است که همگرایی زمان محدود σ و $\dot{\sigma}$ را نتیجه می‌دهد.

در پژوهش کمال و همکاران (2016) الگوریتم کنترل همگن نامعینی که ترکیبی از STA و ترمینال اسلایدینگ به نام ترمینال اسلایدینگ مد کنترل‌کننده پیوسته است، به سیستم‌های مرتبه دوم دارای اختلال ارائه شد، که نامعینی‌ها و اختلالات فشرده‌ی لیپ‌شیتز را جبران می‌کند، همگرایی به اسلایدینگ مرتبه سوم در زمان محدود و در نتیجه دقت اسلایدینگ از درجه‌ی 3 نسبت به σ را نتیجه می‌دهد، سیگنال کنترل پیوسته ایجاد می‌کند و تنها نیاز به داشتن اطلاعات σ و $\dot{\sigma}$ دارد و از سیگنال کنترلی پیوسته مشتق‌پذیر و لیاپانوف اکید استفاده کرده است.

در این مقاله هدف بسط الگوریتم اسلایدینگ مد کنترل‌کننده پیوسته برای سیستم‌های مرتبه دوم وسیع‌تری دارای نامعینی و اختلال و در ضمن آن حفظ مزایای الگوریتم اسلایدینگ مد کنترل‌کننده پیوسته یعنی جبران نامعینی‌ها و اختلالات فشرده‌ی لیپ‌شیتز، همگرایی به اسلایدینگ مرتبه سوم نسبت به σ، ایجاد سیگنال کنترل پیوسته و تنها نیاز داشتن به اطلاعات σ و $\dot{\sigma}$ می‌باشد. برای اثبات همگرایی و پایداری این الگوریتم، از تابع لیاپانوفی پیوسته مشتق‌پذیر و اکید استفاده می‌کنیم. شبیه‌سازی‌ها نتایج همگرایی به اسلایدینگ مرتبه سوم حالات سیستم و دقت آن‌ها را نشان می‌دهند.

2- تعاریف و نمادها

در این مقاله از نمادهای زیر استفاده شده است:

$\lceil z \rfloor = |z| sgn(z)$ که $z \epsilon \mathbb{R}$ و $p \epsilon \mathbb{R}$ می‌باشد. درنتیجه $\lceil z \rfloor^2 = |z| sgn(z) \neq z^2$. همچنین اگر p عدد فردی باشد تساوی $\lceil z \rfloor^p = z^p$ برقرار است. همچنین $\lceil z \rfloor^0 = sgn(z)$، $\lceil z \rfloor^0 |z|^p = \lceil z \rfloor^p$، $\lceil z \rfloor^p \lceil z \rfloor^q = |z|^{p+q}$ برقرار می‌باشند. توابع و سیستم‌های همگن ویژگی‌های جذابی دارند و نقش بسیار مهمی را در اسلایدینگ مرتبه بالا و این مقاله ایفا می‌کنند. رابطه‌ی کلاسیک همگن بودن برای یک تابع اسکالر به صورت مقابل قابل بیان است: $f(kx) = k^{\delta} f(x)$ برای $\delta \epsilon \mathbb{R}$ و $k > 0$. بعضی از تعاریف توابع همگن (وزن دار) و میدان‌های برداری را از پژوهش باکیوتی و روسیر (2005) و دیدگاه‌های مربوط به مجموعه میدان‌های برداری را از لوانت (2005) و ارلف (2003) می‌آوریم. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (یا یک تابع چندمتغیره $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}$, $F(x) \subset \mathbb{R}$) همگن از درجه‌ی δ با تأخیر $d_k : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (k^{r1} x_1, k^{r2} x_2, \dots, k^{rn} x_n)$، به طوری که $r_1, \dots, r_n$ مقادیر مثبتی هستند (وزن‌ها نامیده می‌شوند) اگر برای هر $k > 0$ رابطه‌ی $f(d_k x) = k^{\delta} f(x)$ برقرار باشد (همچنین $F(d_k x) = k^{\delta} F(x)$). یک میدان برداری $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (یا یک مجموعه میدان برداری $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ و $F(x) \subset \mathbb{R}^n$) همگن از درجه‌ی δ است اگر برای $k > 0$، $f(d_k x) = k^{\delta} f(x)$ برقرار باشد (به همین ترتیب $F(d_k x) = k^{\delta} F(x)$). اگر یک میدان برداری همگن از درجه‌ی $\delta \neq 0$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت همواره می‌توان با یک تغییر ضریب تناسبی مناسب وزن‌های $r_1, \dots, r_n$ را به -1 یا $+1$ مقیاس کرد.

3- توصیف سیستم

یک سیستم مرتبه 2 دارای اختلال که به صورت زیر توصیف شده است را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a x_2 \\ \dot{x_2} = u + \mu(t) \end{cases} \quad (1)$$

که در آن $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ حالت‌ها هستند، $u \epsilon \mathbb{R}$ کنترل‌کننده است، $\mu(t)$ اختلال است که سیگنال پیوسته‌ی زمانی لیپ شیتز با ثابت لیپ شیتز Δ می‌باشد، به این معنی که $|\dot{\mu}(t)| \le \Delta$ همواره برقرار می‌باشد و a نامعینی موجود در سیستم است که به صورت پله هایی با مقادیر مثبت و گام دلخواه با $|a| < 10$ در نظر گرفته می‌شود. مساله‌ی ما طراحی قانون کنترل زمان پیوسته است به طوری که خروجی σ، $\sigma = x_1$ و مشتق آن $\dot{\sigma} = a x_2$ علی رغم اختلال و نامعینی در زمان محدود همگرا شوند و در صفر بمانند $\sigma = \dot{\sigma} \equiv 0$. همچنین بعد از یک زمان محدود کنترل باید اختلال را جبران کند، یعنی $u(t) \equiv -\mu(t)$، تا $\ddot{\sigma} \equiv 0$ و نیز یک مد لغزشی مرتبه سوم ایجاد شود. این مساله با قانون کنترل فیدبک دینامیک حل می‌شود.

$$\begin{aligned} u &= -k_1 L^{\frac{2}{3}} \lceil \varphi_L(x_1, x_2) \rfloor^{\frac{1}{3}} + z \\ \dot{z} &= -k_2 L \lceil \varphi_L(x_1, x_2) \rfloor^{0} \end{aligned} \quad (2)$$

که

$$\varphi_L(x_1, x_2) = x_1 + \frac{\alpha}{L^{\frac{1}{2}}} \lceil x_2 \rfloor^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

یک تابع پیوسته مشتق پذیر از حالات است. پارامترهای k_i و L بهره‌های مثبتی‌اند که باید طراحی شوند. برای $L = 1$، $\varphi_1(x_1, x_2)$ را به صورت $\varphi(x_1, x_2)$ می‌نویسیم. با تعریف $x_3 \triangleq z + \mu$ سیستم حلقه بسته‌ی (1) و (2) معادله دیفرانسیل مرتبه سوم ناپیوسته‌ی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= a x_2 \\ \dot{x_2} &= -k_1 L^{\frac{2}{3}} \lceil \varphi_L(x_1, x_2) \rfloor^{\frac{1}{3}} + x_3 \\ \dot{x_3} &= -k_2 L \lceil \varphi_L(x_1, x_2) \rfloor^{0} + \dot{\mu}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

با توجه به اینکه سمت راست معادله‌ی (4) ناپیوسته است پاسخ آن از پژوهش فیلیپف (1988) بدست می‌آید. توجه شود که معادلات دیفرانسیل بسته‌ی مربوط به سیستم ناپیوسته و نامعین (4) همگن از درجه‌ی $\delta = -1$ است و دارای وزن های $r = [3,2,1]$ می‌باشد. در نتیجه‌ی اصلی این مقاله (قضیه‌ی پایین 1) ما از تعریفی که از پژوهش لوانت (2005) در ادامه می‌آید استفاده می‌کنیم: مبدأ $x = 0$ معادله‌ی دیفرانسیل $\dot{x} \epsilon F(x)$ پایدار یکنواخت کلی زمان محدود است اگر پایدار لیاپانوف باشد و برای هر (معادله دیفرانسیل $\dot{x} = f(x)$) $R > 0$ ، وجود داشته باشد $T > 0$ به طوری که هر مسیر با شرایط اولیه‌ی $\|x_0\| < R$ برای همه‌ی $t \ge T$ در زمان T و $x(t) \equiv 0$ به 0 همگرا شود.

1-3- قضیه‌ی 1

سیستم مرتبه‌ی سوم (4) با اختلال کراندار یکنواخت $|\dot{\mu}(t)| \le \Delta$ را در نظر بگیرید. برای هر $\Delta \ge 0$ و $\alpha > 0$، مقادیر مثبتی از بهره‌های (k_1, k_2, L) وجود دارد، به طوری که حالت‌ها صرف نظر از هر اختلال کراندار $|\dot{\mu}(t)| \le \Delta$ به طور کلی و یکنواخت به صفر همگرا شوند. در قسمت 3، قضیه‌ی 1 را به کمک یک تابع لیاپانوف پیوسته مشتق‌پذیر و همگن اثبات می‌کنیم. برای سادگی اثبات را به بخش‌های زیر تقسیم می‌کنیم.

2-3- اثبات قضیه‌ی 1

گام اول: نقش L

با تغییر متغیر $x \to \frac{1}{L}x$ در معادله‌ی (4) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= ax_2 \\ \dot{x_2} &= -k_1\lceil\varphi_L(x_1,x_2)\rfloor^{\frac{1}{3}} + x_3 \\ \dot{x_3} &= -k_2L\left\lceil\varphi_L(x_1,x_2)\right\rfloor^0 + \frac{\dot{\mu}(t)}{L} \end{aligned} \tag{5}$$

چون پایداری برای هردو سیستم (4) و (5) معادل است، ما در ادامه‌ی اثبات سیستم دوم را درنظر می‌گیریم.

گام دوم: پیشنهاد تابع لیاپانوف

$$V(x) = \beta|x_1|^{\frac{5}{3}} + x_1x_2 + \frac{2}{5}\alpha|x_2|^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{{k_1}^3}x_2{x_3}^3 + \gamma|x_3|^5 \tag{6}$$

که همگن (از درجه‌ی $\delta_V = 5$) و پیوسته مشتق‌پذیر است. نشان خواهیم داد با انتخاب $\beta > 0$ و $\gamma > 0$ به اندازه‌ی کافی بزرگ، $V(x)$ مثبت معین است و دو تابع $\mu_{1,2}(\|x\|)$ ازکلاس $\mathcal{K}_\infty$ وجود دارد، به طوری که $\mu_1(\|x\|) \le V(x) \le \mu_2(\|x\|)$.

از نامساوی یانگ در پژوهش هاردی و همکاران (1951) داریم: برای هر مقدار $p > 1$ و $q < 1$ به طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و برای هر عدد حقیقی مثبت a,b,c نامساوی $ab \le c^p\frac{a^p}{p} + c^{-q}\frac{b^q}{q}$ برقرار است. از (6) نتیجه می‌شود:

$$V \ge \beta|x_1|^{\frac{5}{3}} - |x_1||x_2| + \frac{2\alpha}{5}|x_2|^{\frac{5}{2}} - \frac{|x_2||x_3|^3}{{k_1}^3} + \gamma|x_3|^5 \tag{7}$$

و با اعمال نامساوی یانگ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} |x_1||x_2| &\le \frac{3}{5}{c_1}^{\frac{5}{3}}|x_1|^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{5}{c_1}^{\frac{-5}{2}}|x_2|^{\frac{5}{2}} \\ |x_2||x_3|^3 &\le \frac{2}{5}{c_2}^{\frac{-5}{2}}|x_1|^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{5}{c_2}^{\frac{5}{3}}|x_2|^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

که $c_1, c_2 > 0$ ،با جایگزینی در (7) خواهیم داشت:

$$V \ge \left(\beta - \frac{3}{5}{c_1}^{\frac{5}{3}}\right)|x_1|^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{5}\left(\alpha - {c_1}^{\frac{-5}{2}} - {c_2}^{\frac{-5}{2}}\frac{1}{{k_1}^3}\right)|x_2|^{\frac{5}{2}} + (\gamma - \frac{3}{5}\frac{1}{{k_1}^3}{c_2}^{\frac{5}{3}})|x_3|^5$$

توجه شود که اگر تمام ضرایب در نامساوی قبلی مثبت باشند V، مثبت معین است. یعنی شروط مثبت معین بودن V عبارت است از:

$$\beta - \frac{3}{5}{c_1}^{\frac{5}{3}} > 0$$

$$\alpha - {c_1}^{\frac{-5}{2}} - {c_2}^{\frac{-5}{2}}\frac{1}{{k_1}^3} > 0 \tag{8}$$

$$\gamma - \frac{3}{5}\frac{1}{{k_1}^3}{c_2}^{\frac{5}{3}} > 0 \tag{9}$$

از بالا کراندار بودن V نیز به همین صورت اثبات می‌شود.

گام سوم: مشتق تابع لیاپانوف

مشتق V در طول مسیرهای (5) با تابع چند متغیره‌ی زیر داده شده است.

$$\dot{V} = -k_1\left(\varphi - \frac{\lceil x_3\rfloor^3}{{k_1}^3}\right)\left(\lceil\varphi\rfloor^{\frac{1}{3}} - \frac{x_3}{k_1}\right) + \left(\frac{5\beta}{3}\lceil x_1\rfloor^{\frac{2}{3}} + x_2\right)ax_2 - k_2|x_3|^2\left(5\gamma\lceil x_3\rfloor^2 - 3\frac{1}{{k_1}^3}x_2\right)\left(\lceil\varphi\rfloor^0 + \frac{\dot{\mu}}{Lk_2}\right)$$

$$\dot{V} = -k_1\left(\varphi - \lceil\xi_3\rfloor^3\right)\left(\lceil\varphi\rfloor^{\frac{1}{3}} - \xi_3\right) + \left(\frac{5\beta}{3}\left\lceil\varphi - \alpha\lceil x_2\rfloor^{\frac{3}{2}}\right\rfloor^{\frac{2}{3}} + x_2\right)ax_2 - 3\kappa|\xi_3|^2\left(\frac{5}{3}\bar{\gamma}\lceil\xi_3\rfloor^2 - x_2\right)\left(\lceil\varphi\rfloor^0 + \frac{\dot{\mu}}{\lambda}\right) \tag{10}$$

تعریف می‌کنیم:

$$\xi_3 \triangleq \frac{x_3}{k_1},\ \ \kappa \triangleq \frac{k_2}{k_1},\ \ \bar{\gamma} \triangleq \gamma {k_1}^5,\ \ \lambda \triangleq Lk_2 \tag{11}$$

و از رابطه‌ی $x_1 = \varphi - \alpha\lceil x_2\rfloor^{\frac{3}{2}}$، که از رابطه‌ی (3) دست آمده استفاده کردیم و $L = 1$ در نظر گرفتیم. توجه کنید که برای هر مقدار k_1 یک رابطه‌ی یک به یک بین (k_2, γ, L) و $(\kappa, \bar{\gamma}, \lambda)$ برقرار است. در نتیجه می‌توان مقادیر $(\kappa, \bar{\gamma}, \lambda)$ را مستقل از k_1 تعیین کرد. ما می‌خواهیم نشان دهیم که مقادیر مثبت و بزرگ $\beta, \bar{\gamma}, k_1, L$ برای هر مقدار مثبت κ, α, Δ وجود دارد، به طوری که $\dot{V}$ برای هر اختلال $|\dot{\mu}(t)| \le \Delta$ ، منفی معین شود. سپس برای $\dot{V}$ یک تابع پیوسته و همگن که از بالا کراندار است پیدا می‌کنیم. از تساوی‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{5}{3}\beta\left\lceil\varphi - \alpha\lceil x_2\rfloor^{\frac{3}{2}}\right\rfloor^{\frac{2}{3}} + x_2 = \frac{5}{3}\beta\left(\left\lceil\varphi - \alpha\lceil x_2\rfloor^{\frac{3}{2}}\right\rfloor^{\frac{2}{3}} + \alpha^{\frac{2}{3}}x_2\right) - \left(\frac{5\beta}{3}\alpha^{\frac{2}{3}} - 1\right)x_2$$

$$\frac{5}{3}\bar{\gamma}\lceil\xi_3\rfloor^2 - x_2 = \frac{5}{3}\bar{\gamma}\left(\lceil\xi_3\rfloor^2 - \lceil\varphi\rfloor^{\frac{2}{3}}\right) - x_2 + \frac{5}{3}\bar{\gamma}\lceil\varphi\rfloor^{\frac{2}{3}}$$

به علاوه از آنجا که تابع $\lceil . \rfloor^{\frac{2}{3}}$ برای همه‌ی (φ, x_2)، با ثابت $2^{\frac{1}{3}}$، به طور کلی پیوسته هلدر[1] است. در نتیجه:

$$\left|\left\lceil\varphi - \alpha\lceil x_2\rfloor^{\frac{3}{2}}\right\rfloor^{\frac{2}{3}} + \alpha^{\frac{2}{3}}x_2\right| \le 2^{\frac{1}{3}}|\varphi|^{\frac{2}{3}}$$

$$\dot{V} \le -k_1\left(\varphi - \lceil\xi_3\rfloor^3\right)\left(\lceil\varphi\rfloor^{\frac{1}{3}} - \xi_3\right) + W(\varphi, x_2, \xi_3) \tag{12}$$

که W تابع پیوسته و همگن است.

$$W \triangleq \frac{5}{3}2^{\frac{1}{3}}\beta|\varphi|^{\frac{2}{3}}|x_2||a| - a|x_2|^2\left(\frac{5\beta}{3}\alpha^{\frac{2}{3}} - 1\right) + 5\bar{\gamma}\frac{\Delta}{\lambda}\kappa|\xi_3|^4 + 3\kappa|\xi_3|^2\left|\frac{5}{3}\bar{\gamma}\left(\lceil\xi_3\rfloor^2 - \lceil\varphi\rfloor^{\frac{2}{3}}\right) - x_2\right|$$
$$+3\kappa\frac{\Delta}{\lambda}|\xi_3|^2|x_2| - 5\bar{\gamma}\kappa|\varphi|^{\frac{2}{3}}|\xi_3|^2$$

در ادامه دو حالت را برای φ در نظر می‌گیریم.

حالتی که $\varphi = \lceil\xi_3\rfloor^3$:

روی سطح $\mu = \{\varphi = \lceil\xi_3\rfloor^3\}$ ترم اول در (12) حذف می‌شود و $\dot{V}_\mu \le W_\mu(\varphi, x_2, \lceil\varphi\rfloor^{\frac{1}{3}})$، که می‌توان آن را به فرم زیر نوشت $W_\mu = -\left[|\varphi|^{\frac{2}{3}}, |x_2|\right] P \begin{bmatrix}|\varphi|^{\frac{2}{3}} \\ |x_2|\end{bmatrix}$ و

$$P = \begin{bmatrix} 5\bar{\gamma}\kappa\left(1 - \dfrac{\Delta}{\lambda}\right) & \star \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{3}2^{\frac{1}{3}}\beta|a| + 3\kappa\left(1 + \dfrac{\Delta}{\lambda}\right)\right), & \left(\dfrac{5\beta}{3}\alpha^{\frac{2}{3}} - 1\right)a \end{bmatrix}$$

W و درنتیجه $\dot{V}$ روی سطح μ منفی است اگر

---

[1] Hölder

$$\lambda > \Delta \tag{13}$$

$$\beta > \frac{3}{5\alpha^{\frac{2}{3}}} \tag{14}$$

$$\bar{\gamma} > \frac{\left(\frac{5}{3}2^{\frac{1}{3}}\beta|\alpha|+3\kappa\left(1+\frac{\Delta}{\lambda}\right)\right)^2}{20\kappa(1-\frac{\Delta}{\lambda})\left(\frac{5\beta}{3}\alpha^{\frac{2}{3}}-1\right)\alpha} \tag{15}$$

حالتی که $\varphi \neq \lceil\xi_3\rfloor^3$:

حال نشان می‌دهیم با انتخاب k_1 بزرگ امکان دارد $\dot{V}$ خارج از چند برابر μ، منفی معین باشد. برای همین می نویسیم

$$\dot{V}_{\mu^c} \leq -(k_1 - \psi(\varphi, x_2, \xi_3))(\varphi - \lceil\xi_3\rfloor^3)(\lceil\varphi\rfloor^{\frac{1}{3}} - \xi_3)$$

که تابع $\psi(\varphi, x_2, \xi_3)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(\varphi, x_2, \xi_3) \triangleq \frac{W(\varphi, x_2, \xi_3)}{(\varphi - \lceil\xi_3\rfloor^3)(\lceil\varphi\rfloor^{\frac{1}{3}} - \xi_3)} \tag{16}$$

توجه شود که $\psi(\varphi, x_2, \xi_3)$ یک تابع همگن از درجه‌ی $\delta_\psi = 0$ می‌باشد؛ به این معنی که $\forall\ \kappa > 0$

$$\psi(\varphi, x_2, \xi_3) = \psi(k^3\varphi, k^2 x_2, k\xi_3)$$

این مساله ایجاب می‌کند که همه‌ی مقادیری که $\psi(\varphi, x_2, \xi_3)$ می‌تواند اتخاذ کند به سطح $\mathcal{S} = \left\{(\varphi, x_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |\varphi|^{\frac{2}{3}} + |x_2| + |\xi_3|^2 = 1\right\}$ می‌رسند؛ که فشرده است. ما محدوده‌ی φ را به $\mathcal{S}$ محدود می‌کنیم. از آنجایی که صورت کسر پیوسته است و مخرج پیوسته و مثبت است در همه جا، غیر از $\mathcal{S} \cap \mu$ ، ψ پیوسته است. به علاوه از آنجا که تحت شرایط (13) تا (15) W منفی است روی μ، نتیجه می‌شود که ψ شبه پیوسته است. بنابراین روی $\mathcal{S}$ از بالا کراندار است (مک‌شان و باتز، 2005). درنتیجه ψ در $\mathbb{R}^3$ از بالا کراندار است و برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ k_1 به این معنی که

$$k_1 > max_{\mathcal{S}}\{\psi(\varphi, x_2, \xi_3)\} \tag{17}$$

$\dot{V}$ منفی معین است. توجه شود که صرف نظر از $\xi_3 = x_3/k_1$ ، ماکزیمم ψ در رابطه‌ی (17) به k_1 بستگی ندارد، چون ψ همگن از درجه‌ی 0 است. منفی معین بودن $\dot{V}$ از طریق نتایج کلاسیکی که برای توابع همگن آمده است اثبات می‌شود (رجوع شود به پژوهش‌های هستنس (1966) و بات و برنستین (2005)).

لم2. $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ و $\gamma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ که دو تابع پیوسته همگن از درجه $m > 0$ باشند، را در نظر بگیرید. فرض کنید $\gamma(x) \geq 0$ اگر برای تمام $x \neq 0$ ، $\eta(x) > 0$ به طوری که $\gamma(x) = 0$، یک عدد حقیقی λ^* وجود داشته باشد، به طوری که برای همه‌ی $\lambda \geq \lambda^*$ داشته باشیم: $\eta(x) + \lambda\gamma(x) > 0$ برای همه‌ی $x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$. برای انتخاب بهره‌ها در قضیه‌ی 1روند زیر را اتخاذ می‌کنیم.

3-3- روند انتخاب پارامترهای کنترل‌کننده

مقادیر مثبتی برای κ, α, Δ انتخاب کنید. β را طوری انتخاب کنید که (8) و (14) برقرار باشند؛ λ به طوری که (13) برقرار باشد؛ $\bar{\gamma}$ به طوری که (9) و (15) برقرار باشند و در نهایت k_1 به طوری که (17) برقرار باشد. با استفاده از (11)، یک مجموعه مقدار از k_1، k_2، α و L به دست می‌آیند به طوری که مشخصه‌های همگرایی (4) برقرار شوند. از آنجایی که $\dot{V}$ با یک تابع پیوسته، منفی معین و همگن از درجه‌ی $\delta_{\dot{V}} = 4$ از بالا

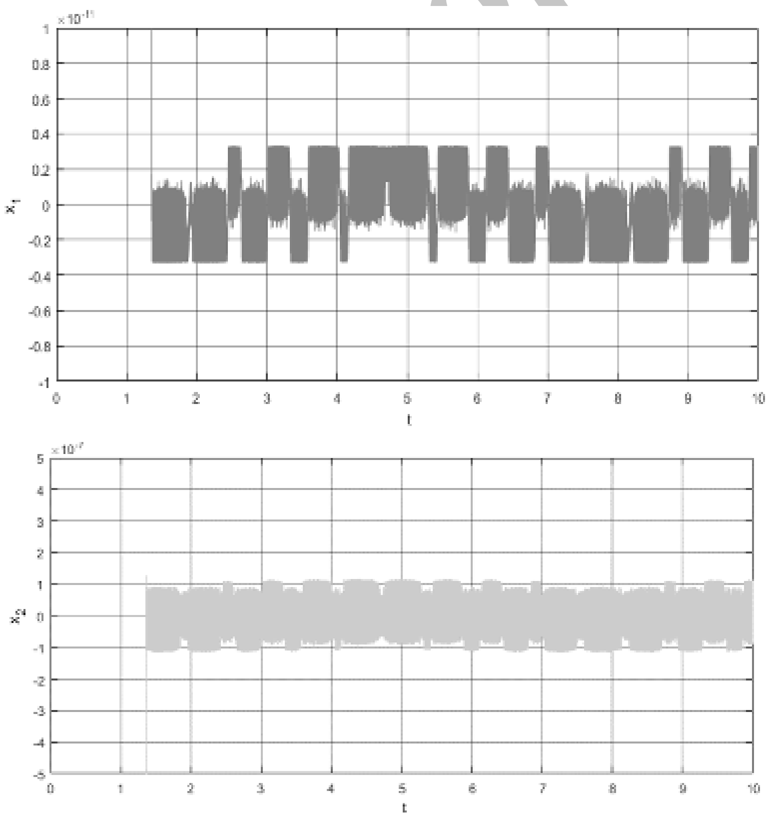
کراندار است (راث هرویتس (12) را ببینید) و V پیوسته، مثبت معین و همگن از درجه‌ی $\delta_V = 5$ است؛ از پژوهش بات و برنستین (2005) داریم:

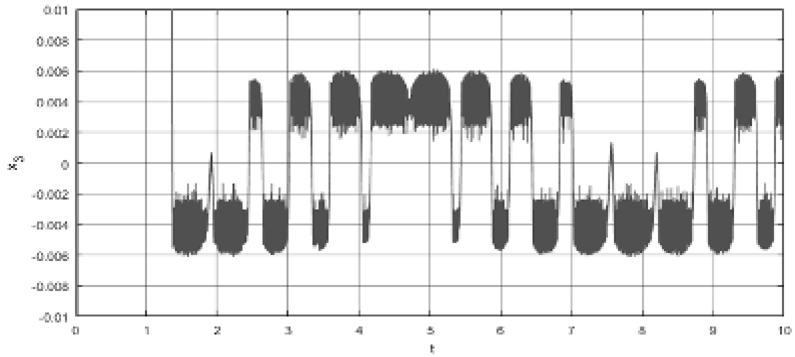
$$\dot{V} \leq -\eta V^{\frac{4}{5}} \tag{18}$$

در نتیجه با استفاده از تئوری کلاسیک برای معادله‌ی دیفرانسیل بسته با توجه به پژوهش‌های باکیوتی و روسیر (2005) و بات و برنستین (2005)، $x = 0$ یک نقطه‌ی تعادل یکنواخت کلی متناوباً پایدار است. از آنجایی که سیستم همگن از درجه‌ی منفی است، نتیجه می‌شود که سیستم (4) پایدار کلی یکنواخت زمان محدود است (از پژوهش لوانت (2005) نتیجه می‌شود). از سوی دیگر نتیجه‌گیری اخیر از طریق نامساوی (18) و قانون همگن بودن در پژوهش ارلف (2003) بدست آمده است.

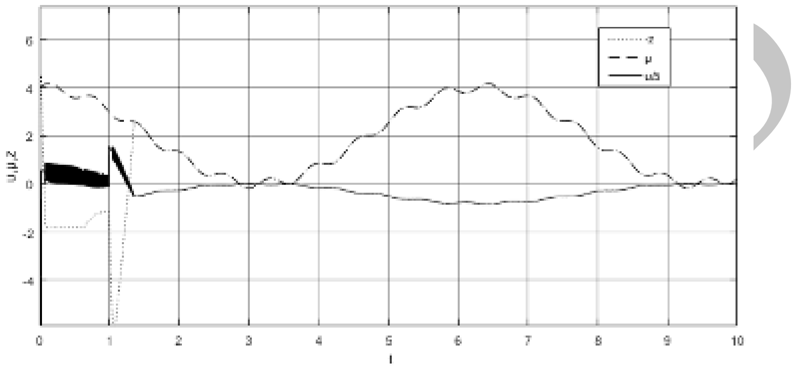
4- مثال

حال نتایج را با شبیه‌سازی نشان می‌دهیم. سیر تکاملی زمان حالت‌های سیستم (4) در شکل (1) نشان داده شده‌اند. که اختلال $\mu(t) = 2 + 2\cos(t) + .2\sin(10t)$ و نامعینی a را به صورت پله در نظرگرفته‌ایم با مقادیر اولیه و انتهایی 1 و 3 و بهره‌ها به صورت $k_1 = 16$ ، $k_2 = 7$، $\alpha = 1$ ، با $L = 15 > \Delta = 4$. می‌بینیم که با وجود اختلال و نامعینی، حالت‌ها به صفر همگرا می‌شوند. شکل (1) دقت هریک از حالت ها را در حالتی که گام الگوریتم اویلر $\tau = 10^{-5}$ باشد نشان می‌دهد.



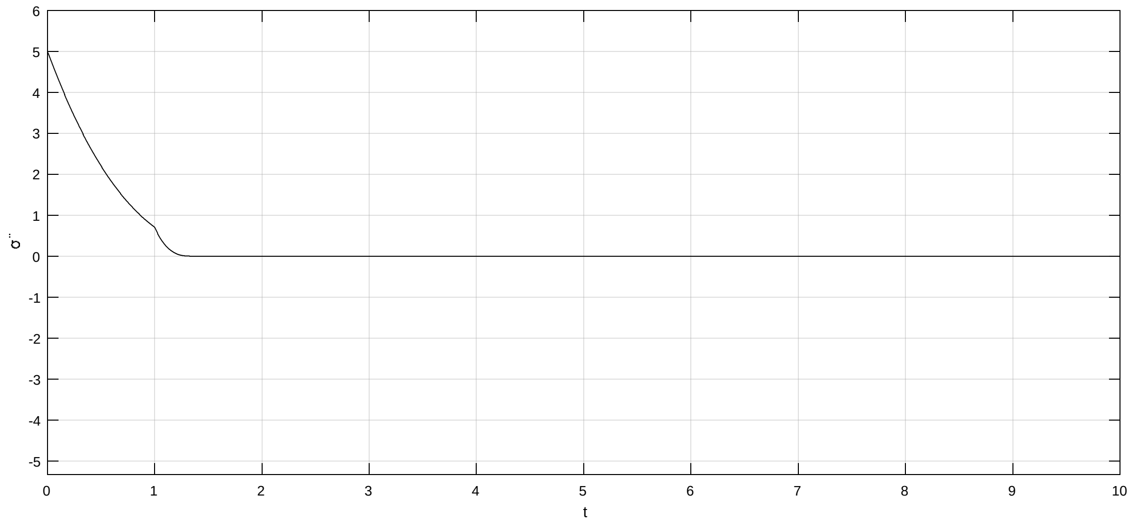


شکل (1): دقت متغیرهای حالت سیستم x_1، x_2 و x_3



شکل (2): رفتار سیگنال کنترل پیوسته‌ی u و تخمین اختلال $\mu(t)$ به وسیله‌ی حالت کنترل‌کننده $-z(t)$

شکل (2)، سیگنال کنترل پیوسته را که توسط کنترل‌کننده‌ی (2) طراحی شده است نشان می‌دهد. این شکل همچنین رفتار اختلال و همگرایی زمان محدود حالت z کنترل‌کننده به $-\mu(t)$ را نشان می‌دهد. بنابراین سیگنال کنترل طراحی شده کاملاً قادر به جبران اختلال μ می‌باشد زیرا توانسته است آن را تخمین بزند و در نتیجه همانطور که در شکل (3) نشان داده شده است، از آنجا که $\ddot{\sigma} = 0$ می‌شود همگرایی به اسلایدینگ مرتبه سوم محقق می‌شود.



شکل (3): رفتار زمانی سیگنال مشتق خروجی $(\ddot{\sigma})$

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش کنترل‌کننده مد لغزشی ترمینال پیوسته، برای سیستم‌های مرتبه دوم دارای نامعینی و اختلال، بسط داده شده است. این الگوریتم همگرایی به اسلایدینگ مرتبه سوم در زمان محدود و در نتیجه دقت اسلایدینگ از درجه‌ی سوم نسبت به خروجی را تنها با داشتن اطلاعات خروجی و مشتق اول آن نتیجه می‌دهد، نامعینی‌ها و اختلالات فشرده‌ی لیپ‌شیتز را جبران می‌کند، سیگنال کنترل پیوسته ایجاد می‌کند که منجر به کاهش چترینگ می‌گردد. همگرایی این الگوریتم از طریق یک تابع لیاپانوف همگن، پیوسته مشتق‌پذیر و اکید، پیشنهاد و اثبات می‌شود. شبیه‌سازی‌ها در نرم‌افزار متلب با استفاده از یک مثال فرضی، نتایج همگرایی حالت‌های سیستم به اسلایدینگ مرتبه سوم و دقت آن‌ها را برای سیستمی مرتبه دو با نامعینی پله نشان می‌دهند.

مراجع

[1] Bacciotti, A., & Rosier, L. (2005). Liapunov functions and stability in control theory (2nded.). New York: Springer-Verlag.

[2] Bartolini, G., Ferrara, A., & Usani, E. (1998). Chattering avoidance by second-order sliding mode control. IEEE transactions on Automatic Control, 43(2), 241-246.

[3] Bhat, S. P., & Bernstein, D. S. (2005). Geometric homogeneity with applications to finite-time stability.

Mathematics of Control, Signals, and Systems, 17, 101–127.

[4] Filippov, A. F. (1988). Differential equations with discontinuous right-hand side.Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

[5] Fridman, L. (2011). Sliding mode enforcement after 1990: main results and some open problems. In Sliding modes after the first decade of the 21st century (pp. 3-57). Springer Berlin Heidelberg.

[6] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1951). Inequalities. London: Cambridge Unversity Press.

[7] Hestenes, M. R. (1966). Calculus of variations and optimal control theory. New York:John Wiley & Sons.

[8] Kamal, S., Moreno, J. A., Chalanga, A., Bandyopadhyay, B., & Fridman, L. M. (2016). Continuous sliding-mode controller. Automatica, 69, 308-314.

[9] Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. International journal of control, 58(6), 1247-1263.

[10] Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. Automatica, 34(3), 379-384.

[11] Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. International journal of Control, 76(9-10), 924-941.

[12] Levant, A. (2005). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. IEEE transactions on automatic control, 50(11), 1812-1816.

[13] Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. Automatica, 41, 823–830.

[14] Levant, A., & Fridman, L. M. (2010). Accuracy of homogeneous sliding modes in the presence of fast actuators. IEEE Transactions on Automatic Control, 55(3), 810-814.

[15] McShane, E. J., & Botts, T. A. (2005). Real analysis. NY: Dover Publications Inc.

[16] Moreno, J. A., & Osorio, M. (2008). A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on (pp. 2856-2861). IEEE.

[17] Orlov, Y. (2003). Finite time stability of homogeneous switched systems. In Proceedings of the 42nd IEEE conference on decision and control. Vol. 4 (pp. 4271–4276).

[18] Orlov, Y., Aoustin, Y., & Chevallereau, C. (2011). Finite time stabilization of a perturbed double integrator—Part I: Continuous sliding mode-based output feedback synthesis. IEEE Transactions on Automatic Control, 56(3), 614-618.

[19] Polyakov, A., & Poznyak, A. (2009). Reaching time estimation for “super-twisting” second order sliding mode controller via Lyapunov function designing. IEEE Transactions on Automatic Control, 54(8), 1951-1955.