

# تحلیل کمانش مکانیکی ورق دایره ای FGM دوطرفه بر اساس تئوری مرتبه

## سوم تغییر شکل برشی صفحات

حسین خسروی<sup>۱\*</sup>

استادیار، عضو هیات علمی گروه عمران، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

*H.khosravi@hsu.ac.ir*

ساناز محسن آبادی<sup>۱</sup>

کارشناس ارشد عمران-سازه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات خراسان رضوی، گروه عمران، نیشابور، ایران

*Sanaz.mohsenabadi@gmail.com*

### چکیده

در این مقاله، کمانش صفحات دایره ای FGM دوطرفه تحت فشار یکنواخت شعاعی مورد مطالعه قرار گرفته است. خواص مواد تابعی دوطرفه نسبت به سطح میانی صفحه متقارن و طبق قانون توانی در راستای ضخامت تغییر می کند، بطوریکه سطح میانی صفحه دایره ای فلز خالص و طرفین صفحه، سرامیک خالص در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی به دو صورت تکیه گاه ساده و گیردار در نظر گرفته شده است. با بکارگیری روش انرژی معادلات غیرخطی تعادل استخراج و معادلات پایداری توسط روش تعادل در مجاورت برای تعیین فشار بحرانی کمانش مورد استفاده قرار گرفته و یک حل بسته برای آن بدست آمده است. اثر عوامل مختلف، شامل نرخ تغییرات ضخامت به شعاع ورق، شاخص کسر حجمی تغییرات در صد مواد مورد بررسی قرار گرفته است. بر طبق نتایج فشار بحرانی کمانش در صفحات دایره ای FGM با افزایش نسبت ضخامت به شعاع ورق افزایش و با افزایش شاخص کسر حجمی  $\Omega$ ، بطور پیوسته کاهش می یابد.

**واژه‌های کلیدی:** صفحات دایره ای، کمانش، FGM، تئوری برشی مرتبه سوم

سرامیک خالص و یک سطح فلز خالص می باشد. بین این دو سطح ترکیب پیوسته ای از هر دو می باشد. خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته ای در جهت ضخامت دارد. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب مواد تشکیل دهنده دارای خواص مکانیکی موثری نسبت به مواد کامپوزیتی لایه ای می باشند.

بررسی پایداری و مطالعه رفتار کمانشی صفحات همواره به عنوان یکی از موضوعات مهم در تحلیل سازه‌ها مورد توجه قرار گرفته است. اولین حل مسأله پایداری برای صفحات توسط Brayan [۱] در سال ۱۸۹۱ انجام شد. او کمانش یک صفحه‌ی دایره‌ای با تکیه‌گاه گیردار را تحت بار یکنواخت شعاعی بررسی نمود. از آن زمان تاکنون مقالات و کتاب‌های متعددی در این زمینه نشر یافته‌اند. Timoshenko و Gere [۲] مسأله‌ی پایداری انواع سازه‌های مهندسی شامل ستون‌ها، قاب‌ها، تیرهای خمیده، صفحات و پوسته‌ها را در کتابی با عنوان تئوری پایداری الاستیک مورد بحث قرار دادند. پس از آن Brush و Almroth [۳] در کتاب خود با عنوان کمانش ستون‌ها، صفحات و پوسته‌ها تحلیل جامعی از مسأله کمانش و روش‌های مختلف برای فرمول بندی معادلات تعادل غیرخطی و پایداری ارائه نمودند. محققان بعدی این معادلات اساسی را برای صفحات ساخته شده از مواد مرکب، شرایط هندسی مختلف و همچنین بارگذاری گرمایی گسترش دادند. Yamaki [۴] کمانش صفحات حلقوی با بارگذاری روی لبه‌ی داخلی و خارجی را مورد بررسی قرار داد و نتایج نشان داد که کمانش در این حالت لزوماً در مود اول اتفاق نمی‌افتد. Shen و Li [۵] با استفاده از روش اغتشاش دو مرحله ای بر اساس تئوری برشی مرتبه ی سوم پس کمانش صفحات ساندویچ با

واضح است که تغییر ناگهانی در ترکیب مواد و خصوصیات آن‌ها درون یک جسم اغلب باعث ایجاد تمرکز تنش شدید می‌شود. همچنین ثابت شده است که اگر تغییر خواص از یک ماده به ماده دیگر بطور تدریجی صورت گیرد این تنش‌های متمرکز بطور چشمگیری کاهش می‌یابند. این ملاحظات ایده اصلی برای تعریف مواد FGM را شکل می‌دهد. بر اساس تعریف، مواد FGM موادی هستند که تغییر ترکیب مواد بصورت میکروساختاری در آن‌ها صورت می‌پذیرد. بطوریکه تغییر خواص از یک نقطه به نقطه دیگر بصورت تدریجی و با یک تابعیت مشخص انجام می‌گیرد که این تغییر تدریجی در کسر حجمی مواد تشکیل دهنده، موجب تغییر تدریجی و پیوسته‌ی خواص می‌گردد. با استفاده از این مواد می‌توان عملکرد سازه را برای نیاز مورد نظر بهینه کرد.

بنابر مشکلاتی که در صنایع مختلف برای مواد تحت تنش‌های حرارتی و مکانیکی بالا وجود داشت، دانشمندان علم مواد در سال ۱۹۸۴ در منطقه سندایی ژاپن برای اولین بار مواد تابعی را پیشنهاد نمودند. FGM مخفف Functionally Graded Material می‌باشد. مواد تابعی موادی کامپوزیت با ریز ساختار غیر همگن می‌باشند که خواص مکانیکی آنها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. نوع رایج آن ترکیب پیوسته سرامیک و فلز می‌باشد. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به دست می‌آیند. تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً پیوسته می‌باشد، به گونه ای که یک سطح از جنس

لایه‌های سطحی FGM را تحت بارگذاری فشاری در محیط گرمایی بررسی نمودند. آن‌ها در مطالعه‌ی خود، خواص مکانیکی و گرمایی را تابعی از دما در نظر گرفتند و تأثیر نقص اولیه را روی رفتار پس-کمانش ارزیابی کردند. در صفحات ساخته شده از مواد FGM تغییر کسر حجمی سرامیک و فلز با یک تابعیت خاص در راستای ضخامت انجام می‌گیرد. بسته به اینکه محیط با دمای بالا در یک طرف یا دو طرف صفحه اعمال شود، صفحات FGM به دو دسته FGM یک طرفه و دو طرفه تقسیم می‌شوند. در حالت یک طرفه، یک سطح سرامیک خالص و سطح دیگر فلز خالص است، در حالیکه در حالت دوطرفه معمولاً دو سطح سرامیک خالص و صفحه‌ی میانی فلز خالص می‌باشد

راستای ضخامت مشخص می‌کند و می‌تواند بزرگتر و یا مساوی صفر باشد. مقادیر صفر و بی‌نهایت برای این شاخص، به ترتیب معرف سرامیک خالص و فلز خالص است..

$$P_f = V_m P_m + V_c P_c \quad (1)$$

$$V_c = \left( -\frac{2z}{h} \right)^n \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

$$V_c = \left( \frac{2z}{h} \right)^n \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2)$$

$$V_m = 1 - V_c$$

### ۳- معادلات تعادل و پایداری

یک ورق دایره‌ای از جنس مواد تابعی دو طرفه به شعاع  $a$  و ضخامت  $h$  مفروض است. ورق تحت فشار یکنواخت شعاعی می‌باشد. میدان جابجایی براساس تئوری یرشی مرتبه سوم (Reddy) در مختصات قطبی با تقارن محوری به صورت زیر بیان می‌شود.

$$U(r, z) = u + z\varphi - \alpha z^3 \left( \varphi + \frac{dw}{wr} \right), \alpha = \frac{\epsilon}{3h^2}$$

$$V = 0 \quad \text{بخاطر تقارن محوری} \quad (3)$$

$$w(r, z) = w(r, z)$$

که در آن  $u$ ،  $v$  و  $w$  مؤلفه‌های جابجایی نقاط صفحه میانی در راستای  $z$ ،  $\theta$  و  $r$  هستند.

### ۲- خواص مواد تابعی

مواد FGM دسته‌ای از مواد ناهمگن هستند و خواص آن‌ها تابعی از موقعیت خواهد بود. برای این مواد، خواص تابعی از کسر حجمی مواد تشکیل دهنده یعنی سرامیک و فلز در هر نقطه است. بر این اساس، خواص مختلف ماده‌ی FGM مطابق رابطه‌ی (۱) در نظر گرفته می‌شود که در آن  $P_m$ ،  $P_c$  و  $P_f$  به ترتیب نشان دهنده‌ی خاصیت فلز، سرامیک و ماده‌ی FGM است. تغییرات کسر حجمی در ماده‌ی FGM تنها در راستای ضخامت و با تابعیت توانی مطابق رابطه‌ی (۲) در نظر گرفته می‌شود که در آن  $V_m$  و  $V_c$  به ترتیب نشان دهنده‌ی کسر حجمی فلز و سرامیک است.  $n$  شاخص تابعیت توانی ماده‌ی FGM است که چگونگی ترکیب کسر حجمی سرامیک و فلز را در

$$(Q_r, R_r) = \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} (\nu, z^r) \tau_{rz} dz$$

معادلات تعادل برای صفحات دایره‌ای را می‌توان با بکارگیری روش انرژی یا نوشتن مستقیم معادلات تعادل برای یک المان بدست آورد. به خاطر تقارن محوری تغییرات در راستای محیطی وجود ندارد و تنها مشتقات نسبت به راستای شعاعی در دستگاه معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شود.

$$N_{r,r} + \frac{Nr - N\theta}{r} = 0$$

$$\frac{M_\theta - M_r}{r} + Q_r - \nu \Delta R_r - M_{r,r} + \alpha \frac{P_r - P_\theta}{r} + \alpha P_{r,r} = 0 \quad (V)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) + \frac{\partial}{\partial r}(rN_r \frac{dw}{dr}) + \alpha \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rP_r) - \alpha \frac{\partial P_\theta}{dr} - \nu \Delta \frac{\partial(rR_r)}{\partial r} = 0$$

معادلات بدست آمده، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی است. برای بدست آوردن معادلات پایداری از معادلات غیرخطی تعادل معمولاً از روش تعادل همسایه استفاده می‌شود. این روش برای بررسی پایداری و تحلیل رفتار کمانش سازه‌ها بر اساس تعریف مفاهیم مسیرهای تعادلی اولیه و ثانویه و نقطه دو شاخگی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از این روش می‌توان نقطه دو شاخگی را از حل معادلات دیفرانسیل خطی بدست آورد. بدین ترتیب که برای یک حالت تعادلی روی مسیر تعادلی اولیه، امکان وجود یک شکل تعادلی همسایه تحت همان بار مورد بررسی قرار می‌گیرد. چنین شکل تعادلی در همسایگی تعادل اولیه نشانه وجود یک نقطه دو شاخگی روی مسیر تعادلی است. معادلات لازم برای این منظور، از معادلات تعادل غیرخطی سازه با استفاده از تکنیک اغتشاش استخراج

مسأله‌ی کمانش در مجموعه‌ی مسائل غیرخطی هندسی قرار می‌گیرد. در مسائل غیرخطی تغییر مکان‌ها در محدوده‌ای هستند که نمی‌توان از عبارات حاصلضرب دوران‌ها در روابط کرنش - جابجایی صرف نظر کرد. برای منظور کردن آثار غیرخطی، روابط کرنش - جابجایی فون کارمن مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= U_{,r} + \frac{1}{2}(W_{,r})^2 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{U}{r} \\ \gamma_{rz} &= U_{,z} + W_{,r} \end{aligned} \quad (4)$$

از آنجایی که مطالعه حاضر محدود به مواد با رفتار خطی و بارگذاری در محدوده‌ی خطی می‌باشد، روابط تنش - کرنش بر پایه‌ی قانون هوک در نظر گرفته می‌شود. ارتباط بین مؤلفه‌های تنش و کرنش برای ماده‌ی FGM بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \\ \tau_{rz} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \gamma_{rz} \end{aligned} \quad (5)$$

با انتگرال‌گیری از مؤلفه‌های تنش روی ضخامت صفحه می‌توان نیروها و ممان‌های برآیند را محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} (N_r, M_r, P_r) &= \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} (\nu, z, z^r) \sigma_r dz \\ (N_\theta, M_\theta, P_\theta) &= \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} (\nu, z, z^r) \sigma_\theta dz \end{aligned} \quad (6)$$

$$C_1 \left( \frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{\varphi_1}{r^2} \right) + (F_1 + G_1) \left( \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{dw_1}{dr} \right) + A_1 \left( \varphi_1 + \frac{dw_1}{dr} \right) = 0 \quad (9)$$

که در آن:

$$N_{r_1} = A \left( u_{,r} + \frac{1}{r} (w_{,r})^r + \frac{v u_{,r}}{r} \right) = A \left( u_{,r} + v \frac{u_{,r}}{r} \right)$$

$$N_{r_1} = A \left( u_{r,r} + v \frac{u_{,r}}{r} \right)$$

$$N_{\theta_1} = A \left( \frac{u_{,r}}{r} + v u_{,r} \right)$$

$$N_{\theta_1} = A \left( \frac{u_{,r}}{r} + v u_{,r} \right)$$

$$M_{\theta_1} = 0$$

$$M_{\theta_1} = c \left( \frac{\varphi_1}{r} + v \varphi_{1,r} \right) + F \left( -\frac{\alpha \varphi_1}{r} - \frac{\alpha}{r} W_{1,r} - v \alpha \varphi_{1,r} - v \alpha W_{1,rr} \right)$$

$$P_{\theta_1} = 0$$

$$P_{\theta_1} = F \left( \frac{\varphi_1}{r} + v \frac{\varphi_{1,r}}{r} \right) + G \alpha \left( -\frac{\varphi_1}{r} - \frac{W_{1,r}}{r} - v \varphi_{1,r} - v W_{1,rr} \right)$$

$$Q_{r_1} = 0$$

$$Q_{r_1} = k(\varphi_1 + W_1, r) - \nu \alpha H(\varphi_1 + W_1, r)$$

$$R_{r_1} = 0$$

$$R_{r_1} = H(\varphi_1 + w_1, r) - \nu \alpha T(\varphi_1 + w_1, r) \quad (10)$$

در معادلات پایداری،  $N_{r_1}$  نیروی شعاعی پیش کماتش است که

از حل معادلات تعادل غیرخطی قابل تعیین است. برای همین

منظور با جایگذاری روابط (10) در اولین معادله تعادل (7)

خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{1}{r^2} U = 0 \quad (11)$$

می‌شوند که در آن میدان جابجایی  $u$  با میدان  $(u_0 + u_1)$  جایگزین می‌شود که  $u_0$  نشان‌دهنده یک حالت تعادل روی مسیر اولیه و  $u_1$  یک افزایش کوچک در میدان جابجایی است. با جایگزینی این میدان جدید در معادلات تعادل غیرخطی، کلیه ترم‌هایی که شامل جابجایی کوچک نیستند از معادلات حاصل حذف می‌شوند. چون  $u_0$  خود یک حالت تعادلی است. همچنین اگر افزایش جابجایی به اندازه کافی کوچک باشد، تنها ترم‌های مرتبه‌ی اول جابجایی  $u_1$  در معادلات باقی می‌مانند و ترم‌های مراتب بالاتر حذف می‌شوند. بنابراین معادلات حاصل معادلاتی خطی و همگن بر حسب میدان جابجایی کوچک فرضی هستند. این دستورالعمل برای تعیین پایداری به عنوان معیار پایداری تعادل در مجاورت شناخته می‌شود.

بنابراین معادلات پایداری به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$N_{r_1,r} + \frac{N_{r_1} - N_{\theta_1}}{r} = 0$$

$$\frac{M_{\theta_1} - M_{r_1}}{r} + \varphi_1 - \nu \alpha R_{r_1} - M_{r_1,r} + \alpha \frac{P_{r_1} - P_{\theta_1}}{r} + \alpha P_{r_1,r} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \varphi_1) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r N_{r_1} \frac{dw}{dr} \right) + \alpha \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r P_{r_1}) - \alpha \frac{\partial P_{\theta_1}}{\partial r} - \nu \alpha \frac{\partial (r R_{r_1})}{\partial r} = 0$$

معادلات پایداری بر حسب جابجایی به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$A \left( U_{1,r} + \frac{1}{r} U_{1,r} - \frac{1}{r^2} U_1 \right) = 0$$

$$G_1 \nabla^2 w_1 + (F_1 + G_1) \left( \frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} + \frac{\nu d^2 \varphi_1}{r dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{\varphi_1}{r^2} \right) + A_1 \left( \frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{\varphi_1}{r} \right) + (A_1 + N_{r_1}) \left( \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} \right) = 0$$

$$N_{r0} = N_{\theta0} = -P \quad (15)$$

در دستگاه معادلات پایداری بدست آمده، معادله اول از معادلات دوم و سوم مستقل است. بنابراین برای تعیین فشار بحرانی کمانش، معادلات دوم و سوم مورد استفاده قرار می گیرند برای حل معادله دوم و سوم پایداری یک متغیر جدید معرفی می کنیم:

$$\frac{dw_1}{dr} = y, \quad \frac{d^2 w_1}{dr^2} = \frac{dy}{dr} \quad (16)$$

$$\nabla^2 \bar{y} + o_1 \frac{d^2 \bar{y}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{y}}{dr} o_2 = \frac{E_2}{k_1} (K_2 + 1) \quad (17)$$

که در رابطه بالا پارامترها بصورت زیر می باشد.

$$o_1 = \frac{k_2}{k_1} + \frac{E_1}{K_1} + E_2, \quad o_2 = \frac{E_2}{k_1} (K_2 + 1) \quad (18)$$

$$\bar{y} = \frac{dy}{dr} + \frac{1}{r}$$

معادله دیفرانسیل (۱۷) یک معادله همگن می باشد و ریشه های معادله مشخصه (۱۷) بصورت زیر می باشد.

$$o_2 = \frac{1}{r} \sqrt{2o_1 - 2\sqrt{o_1^2 - \epsilon o_1}} \quad (19)$$

برای ارضای شرط گیردار بودن لبه های ورق با توجه به شرط مرزی باید داشته باشیم:

$$y = \frac{dw_1}{dr} = 0, \quad r = a \quad (20)$$

معادله (۱۱)، معادله غشایی صفحه نامیده می شود. معادله غشایی یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم است که با حل آن میتوان نیروهای درون صفحه ای پیش کمانش و تغییر مکان را تعیین نمود. متغیر مستقل این معادله  $u_0$  که با بدست آوردن آن، نیروهای درون صفحه ای محاسبه می شود. حل معادله (۱۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$u_0 = c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (12)$$

بارگذاری مکانیکی به صورت اعمال یک فشار یکنواخت شعاعی  $P_r$  بر حسب نیوتن بر متر روی لبه است که در این حالت لبه آزادی حرکت در راستای شعاعی دارد. همچنین به علت تقارن، جابجایی در مرکز بایستی محدود باشد. در نتیجه شرایط مرزی برای معادله (۱۱) به صورت زیر بیان می شود.

$$u_0 = finite \quad (\text{مرکز})$$

$$N_{r0} = A \left( u_{0,r}(a) + \frac{\nu}{a} u_0(a) \right) = -P \quad (\text{لبه}) \quad (13)$$

با اعمال شرایط مرزی اول (۱۳) در رابطه (۱۱)،

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{-P}{A(1+\nu)} \quad (13)$$

و از شرط مرزی دوم در معادله (۱۳) خواهد شد و در نتیجه معادله (۱۱) بصورت زیر حاصل می شود.

$$u_0(r) = \frac{-P}{A(1+\nu)} r \quad (14)$$

با جایگذاری رابطه (۱۴) در روابط (۱۱) داریم:

بنابراین:

$$P_{cr} = E_5 \left( \frac{A_1}{E_5} - E_2 + \frac{S}{Q} (E_4 - E_2) \right)$$

$$S = \xi \left( \frac{E_1}{K_1} + E_2 \right) - \eta - \frac{E_2}{K_1}, \xi = O_3^2 \quad (25)$$

$$Q = \frac{1}{K_1} (E_2 - \xi), \eta = O_3^4$$

$$J_1(o_3 a) = 0 \quad (21)$$

$J_1$  تابع بسمل از درجه یکم می باشند و کوچکترین ریشه معادله (21) عبارت است از:

$$o_3 a = 3.8317 \quad (22)$$

با جایگذاری مقدار  $o_3 a = 3.8317$  در معادلات بالا فشار بحرانی کمانش بصورت زیر بدست می آید.

$$P_{cr} = E_5 \left( \frac{A_1}{E_5} - E_2 + \frac{S}{Q} (E_4 - E_2) \right)$$

$$S = \xi \left( \frac{E_1}{K_1} + E_2 \right) - \eta - \frac{E_2}{K_1}, \xi = O_3^2 \quad (23)$$

$$Q = \frac{1}{K_1} (E_2 - \xi), \eta = O_3^4$$

برای ارضای شرط تکیه گاه ساده لبه های ورق با توجه به سومین شرط مرزی خواهیم داشت.

$$O_3 a J_0(O_3 a) - (1 - \nu) J_1(O_3 a) = 0 \quad (24)$$

به عنوان نمونه اگر  $\nu = 0.3$  باشد،  $O_3 a = 2.0489$  خواهد بود. با جایگذاری این مقدار در روابط بالا فشار بحرانی کمانش خواهیم داشت:

معادله (24) به ازای مقادیر مختلف ضریب پواسون، جوابهای متفاوتی خواهد داشت که در جدول (1) کوچکترین ریشه معادله (24) برای مقادیر مختلف  $\nu$  بیان شده است.

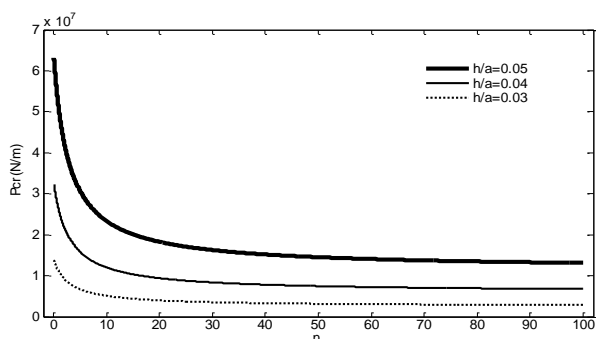
#### ۴- نتایج عددی

در این بخش، رفتار کمانش صفحات دایره ای FGM دوطرفه تحت بارگذاری مکانیکی ارزیابی و نتایج حل دقیق ارائه می شود. تأثیر شرایط مرزی و پارامترهای مختلف همچون شاخص توانی  $n$  مواد FGM، نسبت ضخامت به شعاع  $h/a$ ، بر فشار کمانش بحرانی مورد بررسی قرار گرفته است. ماده ی FGM به صورت ترکیبی از آلومینیم (Al) به عنوان فلز و آلومینا (Alumina) به عنوان سرامیک در نظر گرفته می شود. خواص مکانیکی برای آلومینیم و آلومینا در جدول 1 بیان شده اند [25].

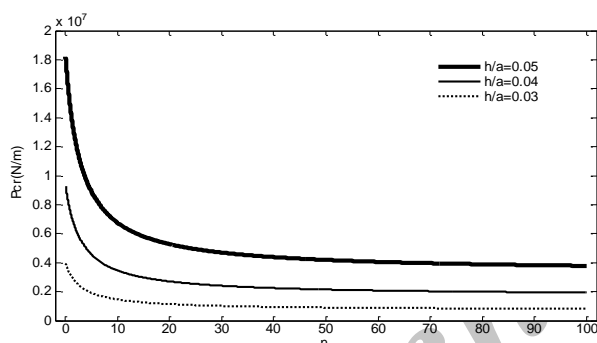
جدول 1 خواص آلومینیم و آلومینا به عنوان مواد تشکیل دهنده ی FGM دوطرفه

ماده	مدول یانگ ( $Gpa$ )
آلومینیم	۷۰
آلومینا	۳۸۰

مقادیر مختلف نسبت ضخامت به شعاع ورق در شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده و ضریب پواسون  $\nu=0.3$  را نشان می دهند.



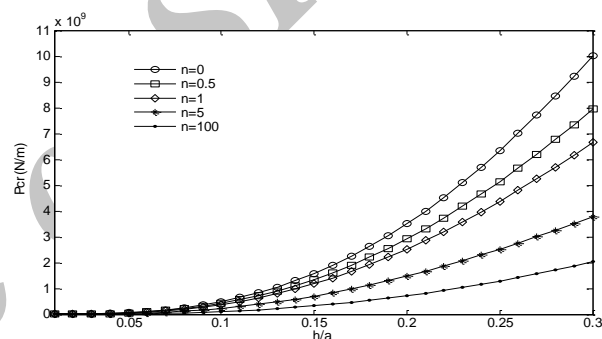
شکل ۳: در شرایط تکیه گاهی گیردار



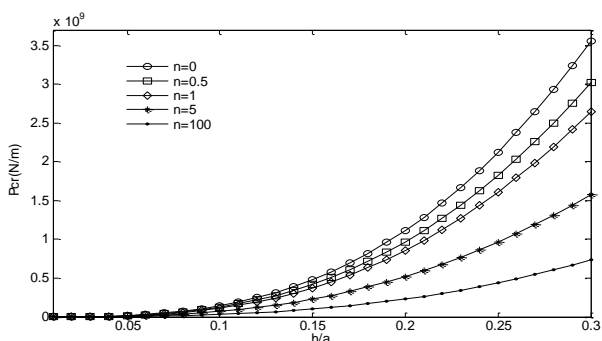
شکل ۴: در شرایط تکیه گاهی ساده

شکل (۵) و (۶) به ترتیب تغییرات فشار بحرانی کمانش  $P_{cr}$  از جنس مواد تابعی دو طرفه بر حسب نسبت ضخامت به شعاع ورق، برای مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی و شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده و ضریب پواسون  $\nu=0.3$  را در تئوری کلاسیک و تئوری برشی مرتبه اول و مطالعه حاضر را نشان می دهند.

شکل (۱) و (۲) به ترتیب تغییرات فشار بحرانی کمانش  $P_{cr}$  از جنس مواد تابعی دو طرفه بر حسب نسبت ضخامت به شعاع ورق، برای مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی در شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده و ضریب پواسون  $\nu=0.3$  را نشان می دهند. با بررسی نتایج مشاهده می شود که افزایش  $h/a$  سبب افزایش فشار بحرانی کمانش در مواد تابعی دو طرفه می شود.



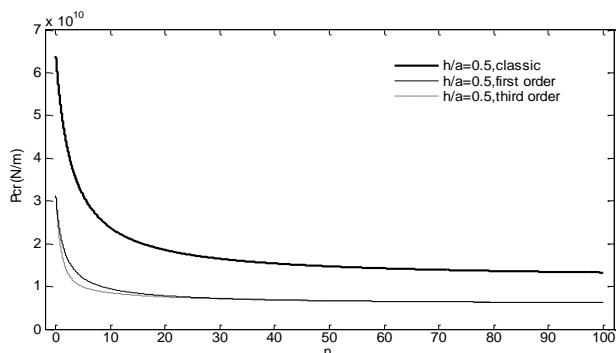
شکل ۱: در شرایط تکیه گاهی



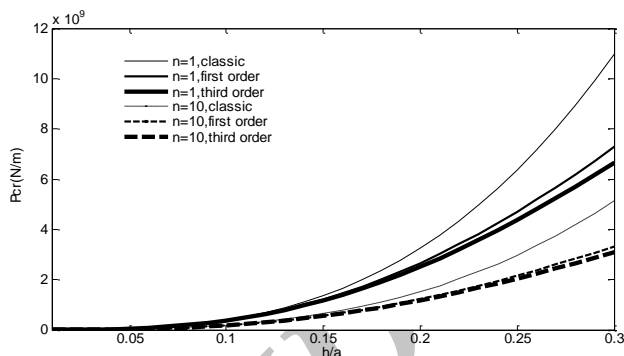
شکل ۲: در شرایط تکیه گاهی ساده

شکل (۳) و (۴) به ترتیب تغییرات فشار بحرانی کمانش  $P_{cr}$  از جنس مواد تابعی دو طرفه بر حسب شاخص کسر حجمی برای

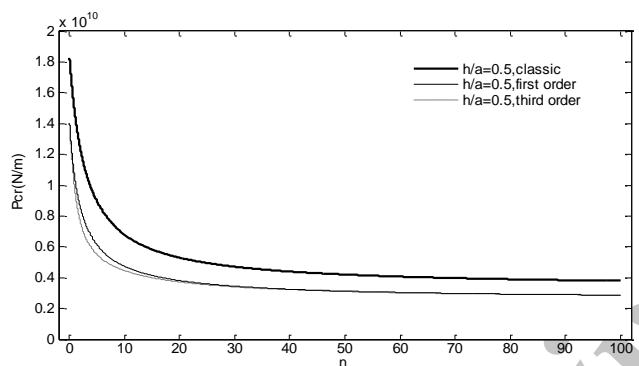




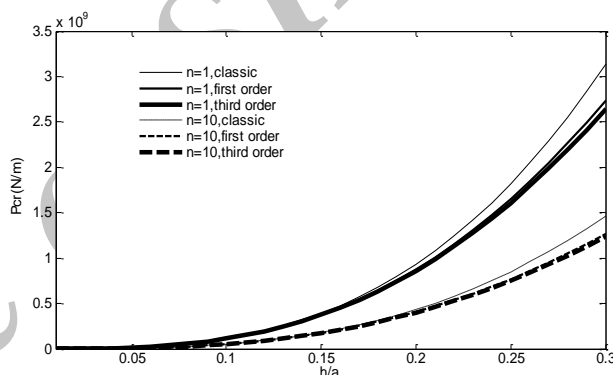
شکل ۷: در شرایط تکیه گاهی گیردار



شکل ۵: در شرایط تکیه گاهی گیردار



شکل ۸: در شرایط تکیه گاهی ساده



شکل ۶: در شرایط تکیه گاهی ساده

شکل (۷) و (۸) مقایسه تغییرات فشار بحرانی کمانش صفحات دایره ای از جنس مواد تابعی دوطرفه برحسب شاخص کسر حجمی و مقادیر مختلف  $h/a$  در تئوری کلاسیک و تئوری برشی مرتبه اول و سوم و در شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده و ضریب پواسون  $\nu = 0.3$  را نشان می دهد.

## ۵- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، معادلات تعادل و پایداری برای صفحات دایروی، از جنس مواد تابعی دوطرفه تحت بارگذاری مکانیکی (فشار یکنواخت شعاعی) با در نظر گرفتن تئوری برشی مرتبه سوم و فرضیات فون کارمن در شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار ارائه شده است. سپس معادلات پایداری به صورت تحلیلی حل گردیده و یک حل بسته برای تعیین فشار بحرانی کمانش ارائه و نتایج به صورت زیر بیان می شود:

[2] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, Theory of elastic stability. New York, McGraw-Hill, 1961

[3] D.O. Brush, B.O. Almroth, Buckling of bars, plates and shells. McGraw-Hill, New York, 1975

[4] N. Yamaki, Buckling of a thin annular plate under uniform compression. Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics. Vol. 25, pp. 267–273, 1958

[5] H. Sh. Shen, Sh. R. Li, Post-buckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties. Composites Part B, Vol. 39, pp. 332–344, 2008

## ۸- چکیده انگلیسی

In this article, the buckling of two-sided FGM circular plates under radial steady pressure has been studied. The properties of the bi-directional material relative to the intermediate plane of the plate are symmetrical and in accordance with the power law in the direction of thickness, so that the middle surface of the circular plate of pure metal and the sides of the sheet is considered pure ceramic. Boundary conditions are considered in two types of simple and seamless support. Using the energy method of nonlinear equilibrium equations, the equilibrium equations are extracted and the stability equations are used by the equilibrium equilibrium method to determine the critical buckling pressure and a closed solution is obtained for it. The effect of different factors, including the rate of change in thickness to the radius of the sheet, the volume fraction index of the changes in the percentage of materials has been investigated. According to the results of the critical pressure of the buckling on the FGM circular plates, increasing the thickness ratio to the radius of the sheet increases and decreases continuously with increasing volume fraction index  $n$ .

**Keywords:** Circular plates, Buckling, FGM, Third order shear theory

۱- فشار بحرانی کمانش در صفحات دایره ای از جنس مواد تابعی دو طرفه در شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع ورق افزایش می یابد.

۲- فشار بحرانی کمانش در صفحات دایره ای در شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار، با افزایش شاخص کسر حجمی  $n$ ، بطور پیوسته کاهش می یابد و در  $n=0$  (سرامیک خالص) بیشترین مقدار را خواهد داشت. ۳- با افزایش ضریب پواسون، فشار بحرانی کمانش صفحات دایروی در شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار افزایش می یابد.

۴- برای ضخامت های نسبتاً زیاد اختلاف تئوری برشی مرتبه سوم از مرتبه اول و کلاسیک زیاد است و استفاده از تئوری کلاسیک و مرتبه اول سبب خطا می شود.

۵- مقاومت به کمانش مکانیکی مواد تابعی دو طرفه در تکیه گاه گیردار بیش از ۳ برابر تکیه گاه ساده می باشد.

## ۷- مراجع

[1] GH. Brayan, On the stability of a plane plate under thrust in its own plane with application to the buckling of the side of a ship. In Proceeding of the London Mathematical Society, Vol. 22, pp. 54–67, 1891