# تحلیل کمانش مکانیکی ورق دایره ای FGM دوطرفه بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی صفحات حسین خسروی<sup>۱</sup> استادیار، عضو هیات علمی گروه عمران، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران H.khosravi@hsu.ac.ir ساناز محسن آبادی<sup>۱</sup> کارشناس ارشد عمران–سازه ،دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات خراسان رضوی، گروه عمران، نیشابور، ایران Sanaz.mohsenabadi@gmail.com

#### چکیدہ

در این مقاله، کمانش صفحات دایره ای FGM دوطرفه تحت فشار یکنواخت شعاعی مورد مطالعه قرار گرفته است. خواص مواد تابعی دوطرفه نسبت به سطح میانی صفحه متقارن و طبق قانون توانی در راستای ضخامت تغییر می کند، بطوریکه سطح میانی صفحه دایره ای فلز خالص و طرفین صفحه، سرامیک خالص در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی به دو صورت تکیه گاه ساده و گیردار در نظر گرفته شده است. با بکار گیری روش انرژی معادلات غیرخطی تعادل استخراج و معادلات پایداری توسط روش تعادل در مجاورت برای تعیین فشار بحرانی کمانش مورد استفاده قرار گرفته و یک حل بسته برای آن بدست آمده است. اثر عوامل مختلف، شامل نرخ تغییرات ضخامت به شعاع ورق، شاخص کسر حجمی تغییرات در صد مواد مورد برر سی قرار گرفته است. بر طبق نتایج فشار بحرانی کمانش در صفحات دایره ای FGM با افزایش نسبت ضخامت به شعاع ورق افزایش و با افزایش شاخص کسر حجمی مجاور بیوسته کاهش می یابد .

**واژههای کلیدی:** صفحات دایره ای، کمانش، FGM، تئوری برشی مرتبه سوم

۱- مقدمه:

واضح است که تغییر ناگهانی در ترکیب مواد و خصوصیات آن ها درون یک جسم اغلب باعث ایجاد تمرکز تنش شدید میشود. همچنین ثابت شده است که اگر تغییر خواص از یک ماده به ماده دیگر بطور تدریجی صورت گیرد این تنش های متمركز بطور چشمگیري كاهش مي يابند. اين ملاحظات ايده اصلی برای تعریف مواد FGM را شکل می-دهد. بر اساس تعریف، مواد FGM موادی هستند که تغییر ترکیب مواد بصورت میکروساختاری در آن ها صورت می-یذیرد. بطوریکه تغییر خواص از یک نقطه به نقطه دیگر بصورت تدریجی و با یک تابعیت مشـخص انجام می گیرد که این تغییر تدریجی در کسـر حجمي مواد تشکیل دهنده، موجب تغییر تدریجي و پیوسته ي خواص مي گردد. با استفاده از اين مواد مي توان عملكرد سازه را برای نیاز مورد نظر بهینه کرد. بنابر مشکلاتی که در صنایع مختلف برای مواد تحت تنش های حرارتی ومکانیکی بالا وجود داشت، دانشمندان علم مواد در سال ۱۹۸۴ در منطقه سندایی ژاپن برای اولین بار مواد تابعی را پیشنهاد نمودند. FGM مخفف Functionally

ریز ساختار غیر همگن می باشد. مواد تابعی موادی کامپوزیت با ریز ساختار غیر همگن می باشند که خواص مکانیکی آنها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می کند. نوع رایج آن ترکیب پیوسته سرامیک و فلز می با شد. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به د ست می آیند. تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملا پیوسته می باشد، به گونه ای که یک سطح از جنس

سرامیک خالص و یک سطح فلز خالص می باشد. بین این دو سطح ترکیب پیوسته ای از هر دو می باشد . خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته ای در جهت ضخامت دارد. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب مواد تشکیل دهنده دارای خواص مکانیکی موثری نسبت به مواد کامپوزیتی لایه ای می باشند.

بررسمی پایداری و مطالعهی رفتار کمانشمی صفحات همواره به عنوان یکی از مو ضوعات مهم در تحلیل سازهها مورد توجه قرار گرفته است. اولین حل مسأله پایداری برای صفحات توسط [۱] Brayan انجام شد. او کمانش یک صفحهی دايرهاي با تكيه گاه گيردار را تحت بار يكنواخت شعاعي برر سي نمود. از آن زمان تاکنون مقالات و کتاب های متعددی در این زمینه نشر یافتهاند. Timoshenko و Gere [۲] مسألهی پایداری انواع سازه های مهند سی شامل ستون ها، قاب ها، تیر های خمیده، صفحات و پوسته ها را در کتابی با عنوان تئوری پایداری الاستیک مورد بحث قرار دادند. پس از آن Brush و Almroth [۳] در کتاب خود با عنوان کمانش ستونها، صفحات و يو سته ها تحليل جامعی از مساله کمانش و روشهای مختلف برای فرمول بندی معادلات تعادل غيرخطي و پايداري ارائه نمودند. محققان بعدي این معادلات اساسی را برای صفحات ساخته شده از مواد مرکب، شرایط هندسی مختلف و همچنین بارگذاری گرمایی گسترش دادند.Yamaki [۴] کمانش صفحات حلقوی با بار گذاری روی لبهي داخلي و خارجي را مورد برر سي قرار داد و نتايج نشان داد که کمانش در این حالت لزوماً در مود اول اتفاق نمی افتد. Shen و Li [۵] با استفاده از روش اغتشاش دو مرحله ای بر اساس تئوری برشی مرتبه ی سوم پس کمانش صفحات ساندویچ با

لایه ¬های سطحی FGM را تحت بار گذاری فشاری در محیط گر مایی بررسی نمود ند. آن ها در مطالعه ی خود، خواص مکانیکی و گر مایی را تابعی از دما در نظر گرفتند و تأثیر نقص اولیه را روی رفتار پس-کمانش ارزیابی کردند. در صفحات ساخته شده از مواد FGM تغییر کسر حجمی سرامیک و فلز با یک تابعیت خاص در راستای ضخامت انجام می گیرد. بسته به اینکه محیط با دمای بالا در یک طرف یا دو طرف صفحه اعمال شود، صفحات FGM به دو دسته FGM یک طرفه و دو طرفه شود، صفحات FGM به دو دسته FGM یک سطح سرامیک تقسیم می شوند. در حالت یک طرفه، یک سطح سرامیک دوطرفه معمولاً دو سطح سرامیک خالص و صفحه ی میانی فلز خالص می باشد

### ۲- خواص مواد تابعی

مواد FGM دسته ای از مواد ناهمگن هستند و خواص آن ها تابعی از موقعیت خوا هد بود. برای این مواد، خواص تابعی از کسر حجمی مواد تشکیل دهنده یعنی سرامیک و فلز در هر نقطه است. بر این اساس، خواص مختلف ماده ای FGM مطابق رابطه-ی (۱) در نظر گرفته می شود که در آن Pc ، Pn مو Pf به FGM است. تغییرات کسر حجمی در ماده ی FGM تنها در راستای نرتیب نشان دهنده ی خاصیت فلز، سرامیک و ماده ی FGM به است. تغییرات کسر حجمی در ماده ی FGM تنها در راستای ضحامت و با تابعیت توانی مطابق رابطه ی(۲) در نظر گرفته می شود که در آن Vn و Vc به ترتیب نشان دهنده ی کسر حجمی فلز و سرامیک است. n شاخص تابعیت توانی ماده ی FGM

راستای ضخامت مشخص می کند و می تواند بزرگتر و یا مساوی صفر با شد. مقادیر صفر و بی نهایت برای این شاخص، به ترتیب معرف سرامیک خالص و فلز خالص است..

$$P_f = V_m P_m + V_c P_c \tag{1}$$

$$V_{c} = \left(-\frac{2z}{h}\right)^{n} \qquad -\frac{h}{2} \le z \le 0$$

$$V_{c} = \left(\frac{2z}{h}\right)^{n} \qquad 0 \le z \le \frac{h}{2}$$

$$V_{m} = 1 - V_{c}$$
(Y)

#### ۳- معادلات تعادل و پایداری

یک ورق دایره ای از جنس مواد تابعی دو طرفه به شــعاع a و ضخامت h مفروض است.ورق تحت فشار یکنواخت شعاعی می باشد. میدان جابجایی براساس تئوری بر شی مرتبه سوم (Reddy) در مختصات قطبی با تقارن محوری به صورت زیر بیان می شود.

w(r,z) = w(r,z)

که در آن v ·u و w مؤلفههای جابجایی نقاط صفحه میانی در راستای z ، θ و r هستند.

$$(Q_r, R_r) = \int_{-\frac{h}{\tau}}^{\frac{h}{\tau}} (\iota, z^{\tau}) \tau_{rz} d_z$$

معادلات تعادل برای صفحات دایرهای را می توان با بکار گیری روش انرژی یا نوشتن مستقیم معادلات تعادل برای یک المان بدست آورد. به خاطر تقارن محوری تغییرات در راستای محیطی وجود ندارد و تنها مشتقات نسبت به راستای شعاعی در دستگاه معادلات دیفرانسیل ظاهر می شود.

 $N_{r.r} + \frac{Nr - N\theta}{r} = \cdot$  $\frac{M_{\theta}-M_{r}}{r} + Q_{r} - r \Box R_{r} - M_{r,r} + \alpha \frac{P_{r}-P_{\theta}}{r} + \alpha P_{r,r} = \cdot$ **(V)**  $\frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) + \frac{\partial}{\partial r}\left(rN_r\frac{dw}{dr}\right) + \alpha \frac{\partial^{\gamma}}{\partial r^{\gamma}}(rP_r) - \alpha \frac{\partial P_{\theta}}{dr} - \tau \Box \frac{\partial(rR_r)}{\partial r} = \cdot$ مادلات بدست آمده، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی است.برای بدست آوردن معادلات پایداری از معادلات غیر خطی تعادل معمولا از روش تعادل همسا یه استفاده می شـود.این روش برای بررسـی یا یداری و تحلیل رفتار کمانش سازهها بر اساس تعریف مفاهیم مسیرهای تعادلی اولیه و ثانویه و نقطه دو شاخگی مورد استفاده قرار می گیرد. با استفاده از این روش مي توان نقطه دو شــاخگي را از حل معادلات ديفرانســيل خطی بدست آورد. بدین ترتیب که برای یک حالت تعادلی روی مسير تعادلي اوليه، امكان وجود يك شكل تعادلي همسايه تحت همان بار مورد بررسے قرار می گیرد. چنین شــکل تعادلی در همسایگی تعادل اولیه نشانه وجود یک نقطه دو شاخگی روی مسير تعادلي است. معادلات لازم براي اين منظور، از معادلات تعادل غيرخطي سازه با استفاده از تكنيك اغتشاش استخراج

مساله یکمانش در مجموعه ی مسائل غیرخطی هندسی قرار می گیرد. در مسائل غیرخطی تغییر مکان ها در محدوده ای هستند که نمی توان از عبارات حا صلضرب دوران ها در روابط کرنش – جابجایی صرف نظر کرد. برای منظور کردن آ ثار غیرخطی، روابط کرنش – جابجایی فون کارمن مورد استفاده قرار می گیرد.

$$\varepsilon_{r} = U_{,r} + \frac{1}{2} (W_{,r})^{2}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{U}{r}$$

$$\gamma_{rz} = U_{,z} + W_{,r}$$
(F)

از آنجایی که مطالعه حاضر محدود به مواد با رفتار خطی و بارگذاری در محدودهی خطی می باشد، روابط تنش – کرنش بر پایهی قانون هوک در نظر گرفته میشود. ارتباط بین مؤلفههای تنش و کرنش برای ماده یFGM بصورت زیر تعریف میشود.

$$\sigma_{r} = \frac{E(z)}{1 - v^{2}} (\varepsilon_{r} + v\varepsilon_{\theta})$$
  

$$\sigma_{\theta} = \frac{E(z)}{1 - v^{2}} (\varepsilon_{\theta r} + v\varepsilon_{r})$$
  

$$\tau_{rz} = \frac{E(z)}{1 - v^{2}}$$
( $\delta$ )

$$\begin{split} (N_{\rm r}, M_{\rm r}, P_{\rm r}) &= \int_{-\frac{h}{\tau}}^{\frac{h}{\tau}} (1, z, z^{\rm r}) \sigma_{\rm r} d_z \\ (N_{\theta}, M_{\theta}, P_{\theta}) &= \int_{-\frac{h}{\tau}}^{\frac{h}{\tau}} (1, z, z^{\rm r}) \sigma_{\theta} d_z \end{split} \tag{9}$$

$$C_{1}\left(\frac{d^{\gamma}\varphi_{1}}{dr^{\gamma}}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi_{1}}{dr}-\frac{\varphi_{1}}{r^{\gamma}}\right)+\left(F_{1}+G_{1}\right)\left(\frac{d^{\gamma}w_{1}}{dr^{\gamma}}+\frac{1}{r}\frac{d^{\gamma}w_{1}}{dr^{\gamma}}-\frac{1}{r^{\gamma}}\frac{dw_{1}}{dr}\right)+A_{1}\left(\varphi_{1}+\frac{dw_{1}}{dr}\right)=\cdot$$
(9)

که در آن :

$$\frac{d^{\prime}U}{dr^{\prime}} + \frac{\gamma}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{\gamma}{r^{\prime}}U. = \cdot$$
(11)

می شو ند که در آن میدان جابجایی U با میدان U+u میدان U با میدان روی جایگزین می شود که U نشان دهنده یک حالت تعادل روی مسیر اولیه و U یک افزایش کوچک در میدان جابجایی است. با جایگزینی این میدان جدید در معادلات تعادل غیرخطی، کلیه ترمهایی که شامل جایجایی کوچک نیستند از معادلات حاصله حذف می شوند. چون U خود یک حالت تعادلی است. همچنین اگر افزایش جابجایی به اندازه کافی کوچک باشد، تنها ترمهای مرتبه ی اول جابجایی U در معادلات باقی می مانند و ترمهای مراتب بالاتر حذف می شوند. بنابراین معادلات حاصل معادلاتی خطی و همگن بر حسب میدان جابجایی کوچک فرضی هستند.این دستور العمل برای تعیین پایداری به عنوان معیار پایداری تعادل در مجاورت شناخته می شود.

بنابراین معادلات پایداری به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{split} N_{r_{1},r} + \frac{N_{r_{1}} - N_{\theta_{1}}}{r} &= \cdot \\ \frac{M_{\theta_{1}} - Mr_{1}}{r} + \varphi_{1} - r\alpha R_{r_{1}} - M_{r_{1},r} + \alpha \frac{P_{r_{1}} - P_{\theta_{1}}}{r} + \alpha P_{r_{1},r} &= (\Lambda) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_{1}) + \frac{\partial}{\partial r}(rN_{r_{1}}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}) + \alpha \frac{\partial}{\partial r^{\gamma}}(rP_{r_{1}}) - \alpha \frac{\partial P_{\theta_{1}}}{\mathrm{d}r} - r\alpha \frac{\partial(rR_{r_{1}})}{\partial r} &= \cdot \\ \\ number N = 0 \end{split}$$

$$\begin{aligned} number N = 0 \\ number N =$$

$$A\left(U_{1,r.} + \frac{\gamma}{r}U_{1,r} - \frac{\gamma}{r^{\gamma}}U_{1}\right) = \cdot$$

$$G_{\gamma}\nabla^{\epsilon}w_{1} + (F_{1} + G_{\gamma})\left(\frac{d^{\gamma}\varphi_{1}}{dr^{\gamma}} + \frac{\gamma}{r}\frac{d^{\gamma}\varphi_{1}}{dr^{\gamma}} - \frac{\gamma}{r^{\gamma}}\frac{d\varphi_{1}}{dr} + \frac{\varphi_{1}}{r^{\gamma}}\right) +$$

$$A_{\gamma}\left(\frac{d\varphi_{\gamma}}{dr} + \frac{\varphi_{\gamma}}{r}\right) + (A_{\gamma} + N_{r.})\left(\frac{d^{\gamma}w_{1}}{dr^{\gamma}} + \frac{\gamma}{r}\frac{dw_{1}}{dr}\right) = \cdot$$

$$N_{r0} = N_{\theta 0} = -P \tag{10}$$

در دستگاه معادلات یا پداری بدست آمده، معادلهی اول از معادلات دوم و ســوم مســتقل اســت. بنابراین برای تعیین فشــار بحرانی کمانش، معادلات دوم و سوم مورد استفاده قرار می گیرند برای حل معادله دوم و سوم پایداری یک متغیر جدید معرفی می كنيم:

$$\frac{dw_1}{dr} = y, \qquad \frac{d^2 w_1}{dr^2} = \frac{dy}{dr} \tag{19}$$

$$\nabla^{\xi} \overline{y} + o_{\lambda} \frac{d^{\chi} \overline{y}}{dr^{\chi}} + \frac{\partial}{r} \frac{d\overline{y}}{dr} o_{\chi} = \frac{E_{\chi}}{k_{\chi}} (K_{\chi} + \lambda)$$
(1V)

ده در رابطه بالا پارامترها بصورت ریز می باسد.  

$$O_{1} = \frac{k_{Y}}{k_{1}} + \frac{E_{1}}{K_{1}} + E_{Y}, O_{Y} = \frac{E_{Y}}{k_{1}} (K_{Y} + 1) \qquad (1A)$$

$$\overline{y} = \frac{dy}{dr} + \frac{1}{r}$$
nature of the second sec

معادله مشخصه (۱۷) بصورت زیر می باشد.  

$$o_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\tau o_1 - \tau} \sqrt{o_1^{\tau} - \epsilon o_1}$$
(۱۹)

. . 1

$$y = \frac{dw_1}{dr} = 0 \quad , r = a \tag{(Y.)}$$

معادله(۱۱)، معادله ی غشایی صفحه نامیده می شود. معادله ی غشايي يک معادلهي ديفرانسيل معمولي خطي مرتبهي دوم است که با حل آن میتوان نیروهای درون صفحه ای پیش کمانش و تغییر مکان را تعیین نمود.متغیر مســـتقل این معاد له u۰ که با بدست آوردن آن ، نیروهای درون صفحه ای محاسبه می شود.حل معادله (۱۱)به صورت زیر خواهد بود :

$$u_{\cdot} = c_1 r + \frac{c_1}{r} \tag{11}$$

بار گذاری مکانیکی به صورت اعمال یک فشر یکنواخت شعاعی Pr بر حسب نيوتن بر متر روى لبه است كه در اين حالت لبه آزادی حرکت در راستای شعاعی دارد. همچنین به علت تقارن ، جابجایی در مرکز بایستی محدود با شد . در نتیجه شرایط مرزی برای معادله (۱۱) به صورت زیر بیان می شود.

$$u_0 = finite$$
 (مركز)

$$N_{r0} = A\left(u_{0,r}(a) + \frac{v}{a}u_{0}(a)\right) = -P \qquad (17)$$

$$C_2 = 0$$
 با اعمال شرایط مرزی اول (۱۳) در رابطه(۱۱)،  
 $C_1 = \frac{-P}{A(1+\nu)}$  و از شرط مرزی دوم در معادله(۱۳) خواهد  
شد و در نتیجه معادله(۱۱) بصورت زیر حاصل می شود.

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{-P}{A\left(1+\nu\right)}r\tag{14}$$

با جایگذاری رابطه (۱۴) در روابط (۱۱) داریم:

$$P_{cr} = E_{5} \left(\frac{A_{1}}{E_{5}} - E_{2} + \frac{S}{Q} (E_{4} - E_{2})\right)$$

$$S = \xi \left(\frac{E_{1}}{K_{1}} + E_{2}\right) - \eta - \frac{E_{2}}{K_{1}}, \xi = O_{3}^{2} \qquad (Y\Delta)$$

$$Q = \frac{1}{K_{1}} (E_{2} - \xi), \eta = O_{3}^{4}$$

معادله(۲۴) به ازای مقادیر مختلف ضریب پواسون، جوابهای متفاوتی خواهد داشت که در جدول(۱) کوچکترین ریشه معادله(۲۴) برای مقادیر مختلف ۲ بیان شده است.

## ۴- نتایج عددی

در این بخش، رفتار کمانش صفحات دایرهای FGM دوطر فه تحت بارگذاری مکانیکی ارزیابی و نتایج حل دقیق ارائه می شود. تأثیر شرایط مرزی و پارامترهای مختلف همچون شاخص توانی n مواد FGM، نسبت ضخامت به شعاع h/a، بر فشار کمانش بحرانی مورد برر سی قرار گرفته است. ماده ی FGM به صورت ترکیبی از آلومینیم (Al) به عنوان فلز و آلومینا (Alumina) به عنوان سرامیک در نظر گرفته می شود. خواص مکانیکی برای آلومینیم و آلومینا در جدول ۱ بیان شدهاند [۲۵].

## جدول ۱ خواص آلومینیم و آلومینا به عنوان مواد تشکیل دهندهی FGM دوطرفه

مادہ	مدول یانگ ( <i>Gpa</i> )
آلومينيم	γ.
آلومينا	۳۸۰

$$J_1(o_3 a) = 0$$
 (Y1)

$$o_3 a = 3.8317$$
 (YY)

$$P_{cr} = E_{5} \left( \frac{R_{1}}{E_{5}} - E_{2} + \frac{S}{Q} (E_{4} - E_{2}) \right)$$

$$S = \xi \left( \frac{E_{1}}{K_{1}} + E_{2} \right) - \eta - \frac{E_{2}}{K_{1}}, \xi = O_{3}^{2} \qquad (\Upsilon\Upsilon)$$

$$Q = \frac{1}{K_{1}} (E_{2} - \xi), \eta = O_{3}^{4}$$

برای ارضای شرط تکیه گاه ساده لبه های ورق با توجه به سومین شرط مرزی خواهیم داشت.

$$O_3 a J_0 (O_3 a) - (1 - \nu) J_1 (O_3 a) = 0$$
 (YF)

به عنوان نمونه اگر V=0.3 باشد ، O<sub>3</sub>a=2.0489 خواهد بود. با جایگذاری این مقدار در روابط بالا فشار بحرانی کمانش خواهیم داشت:



مقادير مختلف نسبت ضخامت به شعاع ورق در شرايط تكيه



[2] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, Theory of elastic stability. New York, McGraw-Hill, 1961

[3] D.O. Brush, B.O. Almroth, Buckling of bars, plates and shells. McGraw-Hill, New York, 1975

[4] N. Yamaki, Buckling of a thin annular plate under uniform compression. Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics. Vol. 25, pp. 267–273, 1958

[5] H. Sh. Shen, Sh. R. Li, Post-buckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties. Composites Part B, Vol. 39, pp. 332–344, 2008

۸- چکیده انگلیسی

In this article, the buckling of two-sided FGM circular plates under radial steady pressure has been studied. The properties of the bi-directional material relative to the intermediate plane of the plate are symmetrical and in accordance with the power law in the direction of thickness, so that the middle surface of the circular plate of pure metal and the sides of the sheet is considered pure ceramic. Boundary conditions are considered in two types of simple and seamless support. Using the energy method of nonlinear equilibrium equations, the equilibrium equations are extracted and the stability equations are used by the equilibrium equilibrium method to determine the critical buckling pressure and a closed solution is obtained for it. The effect of different factors, including the rate of change in thickness to the radius of the sheet, the volume fraction index of the changes in the percentage of materials has been investigated. According to the results of the critical pressure of the buckling on the FGM circular pages, increasing the thickness ratio to the radius of the sheet increases and decreases continuously with increasing volume fraction index n.

**Keywords**: Circular plates, Buckling, FGM, Third order shear theory

۱-فشار بحرانی کمانش در صفحات دایره ای از جنس مواد تابعی دو طرفه در شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع ورق افزایش می یابد.

۲-فشار بحرانی کمانش در صفحات دایره ای در شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار، با افزایش شاخص کسر حجمی n، بطور پیوسته کاهش می یابد و در ۰=n (سرامیک خالص) بیشترین مقدار را خواهد داشت. ۳-با افزایش ضریب پواسون، فشار بحرانی کمانش صفحات دایروی در شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار افزایش می یابد.

۴-برای ضخامت های نسبتا زیاد اختلاف تئوری برشی مرتبه سوم از مرتبه اول و کلاسیک زیاد است و استفاده از تئوری کلاسیک و مرتبه اول سبب خطا می شود.

۵-مقاومت به کمانش مکانیکی مواد تابعی دوطرفه در تکیه گاه گیردار بیش از ۳ برابر تکیه گاه ساده می باشد.

## ۷-مراجع

[1] GH. Brayan, On the stability of a plane plate under thrust in its own plane with application to the buckling of the side of a ship. In Proceeding of the London Mathematical Society, Vol. 22, pp. 54–67, 1891