بهینه سازی بدون مشتق

مهسا محمدی[1]، مهتاب محمدی[2]

[1]دانش آموز پایه نهم دبیرستان فرزانگان ۱ مشهد دوره ی اول
Emamverdi55@ yahoo.com

[2]دانش آموز پایه دوازدهم دبیرستان فرزانگان ۱ مشهد دوره ی دوم
Math.emamverdi @gmail.com

چکیده

جبر یکی از وسیع‌ترین بخش‌های ریاضیات است. جبر در عمومی‌ترین تعریف آن مطالعه نشانه‌های ریاضی و قوانین برای تغییر این نشانه‌هاست؛ جبر رشته‌ای وحدت‌یافته از تقریباً تمام ریاضیات است. به اولیه‌ترین بخش‌های جبر، جبر مقدماتی گفته می‌شود؛ انتزاعی‌ترین بخش‌های آن جبر انتزاعی یا جبر مدرن است. از جبر مقدماتی به عنوان اساس هرگونه مطالعه ریاضیات، علم و مهندسی، اقتصاد و پزشکی نگریسته می‌شود. در حل مسائل کاربردی، مسائلی وجود دارند که نیاز به بهینه سازی دارندکه با توجه به ساختار مساله، مدلی ایجاد می کنیم که بین دو یا چند پارامتر، رابطه ای برقرار نماییم و هدف این است که تابع حاصل را بیشینه(ماکزیمم) یا کمینه(می نیمم) کنیم.

علم جبر نخستین بار از مشرق‌زمین شروع شد و دانشمندانی چون خوارزمی و غیاث الدین جمشید کاشانی در این علم تأثیرگذار بودند و روش هایی جالب برای محاسبه می نیمم و ماکزیمم داشتند ولی بعد از کشف مفهوم مشتق و پیشرفت حساب دیفرانسیل، روش های نوین جایگزین روش های قبلی شدند، البته لازم به ذکر است که در بعضی از علوم مثلاً "تحقیق در عملیات"، استفاده از مشتق برای بهینه سازی کارآیی ندارد(مصلحیان و میرزاوزیری ۱۳۸٤).

کلمات کلیدی: *جبر، نامساوی، ماکزیمم، می نیمم، اتحاد.*

۱. مقدمه

مفهوم مشتق تا اوائل قرن ۱۷ میلادی، یعنی تا قبل از آنکه ریاضی‌دان فرانسوی، پییر دو فرما به تعیین اکسترمم‌های (ماکزیمم و می نیمم های) چند تابع خاص دست بزند، تنظیم نشده بود. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد، باید افقی باشد. از این رو دیده می‌شود که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم و می نیمم تابع، به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود.

تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم مشتق هدایت کرد. در نگاه نخست این طور به نظر می‌رسید که بین مسئله یافتن مساحت سطح زیر یک نمودار و موضوع تعیین خط مماس بر

منحنی در یک نقطه رابطه‌ای وجود ندارد، اما اولین کسی که دریافت این دو مفهومِ به ظاهر دور از هم در واقع ارتباط نسبتاً نزدیکی با هم دارند آیزاک بارو معلم آیزاک نیوتون بوده‌است(مصلحیان و میرزاوزیری ۱۳۸۴).
اما مفهوم مشتق به شکل امروزی آن، نخستین بار در سال ۱۶۶۶ میلادی توسط نیوتون و به فاصله چند سال بعد از او، توسط لایبنیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد.
نیوتون با دیدگاه فیزیکی به بررسی مشتق پرداخته و از آن برای بدست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده می‌کرد. اما لایب نیتس با دیدگاهی هندسی، از مشتق برای بدست آوردن شیب مماس در منحنی‌ها استفاده می‌کرد. هر یک از این دو دانشمند نمادهای جداگانه‌ای را برای نشان دادن مشتق به کار می‌بردند.

در طی این مقاله سعی شده است تا بعضی از نامساوی ها و اتحادهای جبری مهمی را که برای محاسبه ماکزیمم و می نیمم، کاربرد دارند را مورد مطالعه قرار دهیم و مثال هایی با راه حل ارائه دهیم.

۲. ماکزیمم و می نیمم دو عدد حقیقی دلخواه

فرض کنید a, b دو عدد حقیقی دلخواه باشند و $|x|$ بیانگر قدرمطلق باشد، پس:

$$\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

$$\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a + b$$

$$|a+b| \le |a| + |b| \left(\text{نامساوی مثلثی}\right) \quad \text{و} \quad |a| - |b| \le |a-b|$$

$$(|a| = |a - b + b| \le |a-b| + |b|)$$

مثال زیر از دسته مثال هایی است که از طریق مشتق به احتمال زیاد، قابل حل نیست.

**مجموعه جواب معادله $max\{x, -x\} + |2 - x| = 2$ برابر بازه ی $[a, b]$ است. بیش ترین مقدار b-a را محاسبه کنید(هاشمی موسوی، ۱۳۸۰)؟

$$\boldsymbol{max\{x, -x\} = |x| \to |x| + |2 - x| = 2}$$

قرار می دهیم $\boldsymbol{u = x\ ,\ v = 2 - x}$ آنگاه $\boldsymbol{u + v = 2}$ است.چون $\boldsymbol{2 = |2|}$.

بنابراین رابطه $\boldsymbol{|u| + |v| = |u + v|}$ برقرار می شود یعنی در نامساوی مثلثی، حالت تساوی اتفاق افتاده است لذا باید $\boldsymbol{uv \ge 0}$. لذا $\boldsymbol{x(2 - x) \ge 0}$ که پس از تعیین علامت به دست می آید $\boldsymbol{0 \le x \le 2}$.

پس: ماکزیمم مورد نظر ۲ می باشد.

**ماکزیمم و مینیمم عبارت $\boldsymbol{s = |x - 1| - |x + 5|}$ را بیابید(دارابی، ۱۳۸۵).

راه حل:

$$\boldsymbol{s = |x - 1| - |x + 5| \le |(x - 1) - (x + 5)| = |-6| = |6|}$$

یعنی $\boldsymbol{s \le |6|}$. این نامساوی معادل است با $\boldsymbol{-6 \le s \le 6}$. ماکزیمم=۶ و مینیمم=-۶.

۳- استفاده از نامساوی $a+\frac{1}{a}\geq 2$ در تعیین ماکزیمم و می نیمم

اگر $a>0$ باشد، همواره $a+\frac{1}{a}\geq 2$ است و تساوی وقتی برقرار است که $a=1$ باشد.
همچنین اگر $a<0$ باشد، همواره $a+\frac{1}{a}\leq -2$ است و تساوی وقتی برقرار است که $a=-1$ باشد.
❋❋مقدار می نیمم و ماکزیمم عبارت $\frac{7x^6}{x^{12}+1}$ را به دست آورید(هاشمی موسوی، ۱۳۸۰).
راه حل:

$$\frac{7x^6}{x^{12}+1}=\frac{7}{\frac{x^{12}+1}{x^6}}=\frac{7}{x^6+\frac{1}{x^6}}$$

واضح است که عبارت $\frac{7x^6}{x^{12}+1}\geq 0$.
همچنین، به ازای هرعدد حقیقی x ، $x^6\geq 0$، پس $x^6+\frac{1}{x^6}\geq 2$ در نتیجه $\frac{7}{x^6+\frac{1}{x^6}}\leq\frac{7}{2}$.
ماکزیمم عبارت مورد نظر $\frac{7}{2}$ و می نیمم عبارت مساوی صفر است.
❋❋مقدار می نیمم عبارت $\frac{2x^4+4}{\sqrt{x^4+1}}$ را به دست آورید(هاشمی موسوی،۱۳۸۰).
راه حل:

$$\frac{2x^4+4}{\sqrt{x^4+1}}=2\left(\frac{x^4+1+1}{\sqrt{x^4+1}}\right)=2\left(\frac{x^4+1}{\sqrt{x^4+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\right)=2\left(\sqrt{x^4+1}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\right)$$

به ازای هر عدد حقیقی x ، $\sqrt{x^4+1}\geq 0$ پس $\sqrt{x^4+1}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\geq 2$ در نتیجه عبارت مورد نظر در متن سوال، بزرگتر مساوی ۴ خواهد بود. یعنی می نیمم مقدار عبارت $\frac{2x^4+4}{\sqrt{x^4+1}}$ مساوی ۴ است.

٤-دو نابرابری سودمند، برگرفته از اتحادهای مربع

الف)اگر $\boldsymbol{a,b}$ عددهایی حقیقی باشند، $\boldsymbol{a^2+b^2\geq 2ab}$.

و

ب)اگر $\boldsymbol{b,a}$عددهایی حقیقی و مثبت باشند و $\boldsymbol{a>b}$ ، آنگاه $\boldsymbol{a^3+b^3>ab(a+b)}$. برای اثبات این موضوع توجه می کنیم که با شرایط بیان شده، $\boldsymbol{a+b>0\ ,\ a-b>0}$. بنابراین(نیکلایدس، ۱۳۷۷)

$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a-b)(a+b)>0\rightarrow(a-b)(a^2-b^2)>0\rightarrow}$$

$$\boldsymbol{a^3-ab^2-ba^2+b^3>0\rightarrow}$$

$$\boldsymbol{a^3+b^3>ab^2+ba^2\rightarrow}$$

$$\boldsymbol{a^3+b^3>ab(a+b)}$$

❋❋ اگر $\boldsymbol{b,a}$عددهایی حقیقی باشند، مقدار می نیمم $3a^4-4a^3b+b^4$ را بیابید(باربو،۱۳۷۷).

راه حل:

$$3a^4-4a^3b+b^4=3a^4-3a^3b-a^3b+b^4$$

$$= (a-b)(3a^3) - b(a^3-b^3) = (a-b)(3a^3) - b(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$= (a-b)(3a^3 - a^2b - ab^2 - b^3) = (a-b)(a^3+a^3+a^3-b^3-a^2b-ab^2)$$

$$= (a-b)^2(a^2+ab+b^2+a^2+a^2+ab) = (a-b)^2(2a^2+(a+b)^2) \geq 0$$

می نیمم مقدار این عبارت صفر است.

۵-استفاده از نابرابری میانگین حسابی- هندسی

اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$.

❋❋ اگر $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}$عددهایی حقیقی باشند، مقدار می نیمم $3a^4 - 4a^3b + b^4$ را بیابید(باربو، ۱۳۷۷).

راه حل: مسئله اخیر را در مرحله قبلی با استفاده از اتحادها حل کردیم ولی حالا می خواهیم با استفاده از نابرابری میانگین هندسی- حسابی حل کنیم.

$$\frac{a^4+a^4+a^4+b^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^{12}b^4} = a^3b \rightarrow 3a^4 - 4a^3b + b^4 \geq 0$$

می نیمم عبارت ، صفر است.

٦- تعیین عرض اکسترمم نسبی(ماکزیمم یا می نیمم نسبی) توابع درجه دوم با مشتق و بی مشتق

تابع با ضابطه ی $\boldsymbol{y = x^2 - 2x + 4}$ را داریم،

می خواهیم عرض می نیمم این تابع را به کمک مشتق محاسبه کنیم:

$$\boldsymbol{y' = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1}$$

طول می نیمم را در معادله ی تابع قرار می دهیم تا عرض می نیمم تابع به دست آید

$$y = (1)^2 - 2(1) + 4 = 3$$

خط افقی ۳ بر نمودار تابع مماس است.

حالا می خواهیم بدون مشتق، مقدار می نیمم تابع را بیابیم. فرض می کنیم $y = k$ عرض می نیمم نسبی تابع باشد. اگر خط $y = k$ را با معادله ی منحنی تقاطع دهیم و دلتای معادله ی تقاطع را مساوی صفر قرار دهیم، می توانیم مقدار k را بیابیم.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = k \end{cases} \rightarrow x^2 - 2x + 4 = k \rightarrow x^2 - 2x + (4-k) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 4 - 4(4-k) = 0 \rightarrow 1 - (4-k) = 0 \rightarrow k = 3$$

بنابراین، عرض می نیمم نسبی تابع برابر ۳ است(قندهاری، ۱۳۸۴).

❋❋ عرض های اکسترمم نسبی تابع با ضابطه ی $y = \frac{2x}{x^2+1}$ را بیابید.

راه حل: فرض می کنیم $y = k$ عرض های اکسترمم نسبی باشند. تقاطع را ایجاد می کنیم

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{x^2+1} \\ y = k \end{cases} \rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = \frac{k}{1} \rightarrow kx^2 + k = 2x \rightarrow kx^2 - 2x + k = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 4 - 4k^2 = 0 \rightarrow k^2 = 1 \rightarrow k = \pm 1$$

پس عرض های اکسترمم نسبی این تابع ۱ و ۱- هستند. یعنی ماکزیمم ۱ و می نیمم ۱- می باشد(قندهاری، ۱۳۸۴).

۷-حل مسائل بهینه سازی به روش هندسی

در جنگ جهانی دوم فرماندهی نظامی در انگلستان از گروهی از دانشمندان دعوت کرد تا در تدابیر جنگی مربوط به دفاع زمینی و هوایی کشور مطالعه نمایند. هدف آنها تعیین موثرترین روش استفاده از منابع محدود نظامی بود. از جمله مسائلی که مورد بررسی قرار گرفت مطالعه بهینه سازی بمب افکن های جدید و روش استفاده از راداری بود که به تازگی اختراع شده بود. نام تحقیق در عملیات به این رشته جدید الصاق شدو از آغاز به عنوان رشته ای شناخته شده است که اطلاعات علمی را به منظور تعیین استفاده بهینه از منابع محدود به کار می گیرد(حمدی طه، ۱۳۷۵).

نمونه ای از مدلهای تحقیق در عملیات، دو متغیره هستند که می توان آنها را به روش ترسیم، بهینه سازی نمود.

**تابع هدف $z = 4x_1 + 3x_2$ را با قیدهای زیر، ماکزیمم کنید (حمدی طه، ۱۳۷۵).

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$2x_2 \leq 5$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0$$

راه حل: ناحیه اول دستگاه مختصات را رسم می کنیم (محور افقی: x_1و محور عمودی: x_2) و هر یک از قیدها را با علامت تساوی در نظر گرفته و خط مورد نظر را رسم می کنیم(چون دو متغیره و درجه اول هستند)، سپس ناحیه مربوط به محدودیت را هاشور می زنیم.

فضای مشترک محدودیتهای این مسئله، پنج ضلعی با رئوس $A\binom{0}{0}$, $E\begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}\frac{3}{13}\\ \frac{24}{13}\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}$, $B\binom{2}{0}$ بدست می آید که با جایگزینی مقادیر در تابع هدف، جواب بهینه ۹ می باشد که این مقدار ماکزیمم از جایگزینی نقطه C بدست می آید.

متن یا بدنه اصلی هر مقاله باید مطابق با ماهیت آن توسط نویسنده یا نویسندگان تقسیم‌بندی مناسب گردد.

نتیجه‌گیری

ریاضی علمی است متشکل از اصول، روابط وقواعد . روشهای جدید و کشفیات جدید باعث ابطال و بی ارزش شدن روش های قدیمی نمی شود بلکه همدیگر را تکمیل می کنند.

مراجع

۱- باربو، ادواردج، کلامکین، ماری س و همکاران، پانصد مساله ریاضی پیکارجو،ترجمه: اخباری فر، مهران، انتشارات فاطمی، تهران(۱۳۷۷).

۲-دارابی، ابراهیم، نخستین گامها در المپیادهای ریاضی، انتشارات پیشروان، تهران(۱۳۸۵).

۳- طه، حمدی، آشنایی با تحقیق در عملیات(جلد اول)، ترجمه: بازرگان، محمدمهدی، مرکز نشر دانشگاهی،تهران(۱۳۷۵).

٤- قندهاری، احمد، کاربرد مشتق(از سری کتابهای کوچک ریاضی)، انتشارات مدرسه، تهران، چاپ اول(۱۳۸٤).

۵-مصلحیان، محمد صال، میرزا وزیری، مجید، فلسفه ریاضی، انتشارات واژگان خرد(۱۳۸٤).

٦- نیکلایدس، آنتونی، مهارت در ریاضیات(مسائل حل شده در جبر)، ترجمه: اخباری فر، مهران، انتشارات فاطمی، تهران(۱۳۷۷).

۷- هاشمی موسوی، سید محمدرضا، تعیین دامنه و برد توابع(به روش حل مساله)، انتشارات مدرسه، تهران، چاپ نهم(۱۳۸۰).

Optimization without derivative use

Mahsa Mohammadi
Department of Education, School of Farzanegan 1-1, Mashhad, Iran, E-mail: emamverdi55@yahoo.com

Mahtab Mohammdi
Department of Education, School of Farzanegan 1-2, Mashhad, Iran, E-mail: math.emamverdi@gmail.com

Abstract.
Algebra is one of the most extensive parts of maematics Algebrain its most general definition is the study of mathematical symbolsand laws to change the subject; field algebra is one of nearly allmathematics.
The primary sections of algebra are called primitive algebra; the most abstract parts are abstract algebra or modern algebra. Basic algebra is considered as the basis of any study of mathematics, science and engineering, economics and medicine. In solving practical problems, there are issues that need to be optimized.
Given the problem structure, we create a model that establishes relationship between two or more parameters, and the goal is to maximize (or minimize) the resulting function We'll be half.
Algebra science was first started by The east, and scientists such as "Khwarazmi" and "Ghiasuddin Jamshid Kashani " were influential in this science and had the most interesting and interesting methods for calculating. However, after discovering the concept of derivation and progress of the calculus, new methods of replacing methods Previously, it should be noted that in some sciences, for example, "research in operations", the use of derivative for optimization is not effective (Moslehiani and Mirzaoziri, 2005).

Keywords: Algebra, Inequality, Maximum, Minimum, Unity.